

Sur la correspondance objet-image en optique

P. DUMONTET

Faculté des Sciences d'Alger.

SOMMAIRE. — On considère généralement que pour un système optique stigmatique et aplanétique la correspondance objet-image en amplitude, est un filtre linéaire; l'auteur étudie la validité de cette dernière approximation et montre que souvent les filtres linéaires ne sont qu'une approximation grossière. L'auteur propose une expression mathématique de la correspondance objet-image plus rigoureuse et l'applique au cas de l'imagerie en éclairage partiellement cohérent.

ZUSAMMENFASSUNG. — Man sieht im allgemeinen ein anastigmatisches und aplanatisches System als ein lineares Filter für die Beziehung zwischen Objekt und Bild an. Der Verfasser untersucht die Richtigkeit dieser Vorstellung und zeigt, daß zuweilen diese Annahme eines linearen Filters nur eine rohe Annäherung gibt. Es wird deswegen für die Beziehung zwischen Objekt und Bild ein schärferer mathematischer Ausdruck vorgeschlagen und auf den Fall der Abbildung mit teilweise kohärenter Beleuchtung angewendet.

SUMMARY. — It is generally considered that for a stigmatic and aplanatic optical system the object-image amplitude relationship is that of a linear filter. The validity of this approximation is investigated, and it is shown that in many cases linear filters are only a gross approximation. A more rigorous mathematical expression for the object-image relationship is proposed, and applied to the case of imaging with partially coherent illumination.

Introduction. — L'étude de l'imagerie en éclairage cohérent et partiellement cohérent fait jouer un grand rôle à la correspondance amplitude-amplitude entre un plan objet et son image [1], [2], [3]. On suppose généralement que cette correspondance est un *filtre linéaire* [4], c'est-à-dire qu'elle possède les deux propriétés fondamentales suivantes :

a) *c'est une correspondance linéaire*; si on superpose deux distributions d'amplitudes dans le plan objet les amplitudes correspondantes dans le plan image s'ajoutent; si on multiplie toutes les amplitudes du plan objet par un même nombre complexe, l'amplitude sur l'image est aussi multipliée par le même nombre.

b) *c'est une correspondance invariante par translation*: c'est-à-dire que la distribution d'amplitude complexe dans la tache image reste invariante (en module et en phase) si on déplace le point objet dans son plan.

Il est bien évident que la première hypothèse ne soulève aucune objection (linéarité de l'équation des ondes). Il n'en est pas de même, à priori, de la seconde. En effet, si l'invariance par translation est certainement valable de façon locale au centre du champ, elle n'a aucune raison de subsister si on s'en éloigne. Tout le problème revient alors à savoir si le domaine de validité de cette hypothèse est assez étendu pour que les conséquences qui en découlent soient valables. Un exemple simple [1] montre que ce domaine peut être réduit au point de ne contenir qu'un nombre très limité de taches images.

Etant donné l'emploi constant des filtres linéaires dans les problèmes d'imagerie, il m'a paru utile de discuter avec soin cette question, de façon à voir :

1) quelle est l'étendue du domaine du champ dans lequel la correspondance en amplitude est représentée de façon justifiée par un filtre linéaire ;

2) quelles sont les conséquences pour l'imagerie qui résultent du caractère approximatif de cette représentation.

1. Schéma général. — Soit, dans un plan P , un objet défini par son amplitude complexe $A(p)$ en chaque point p de P ; un système optique centré O

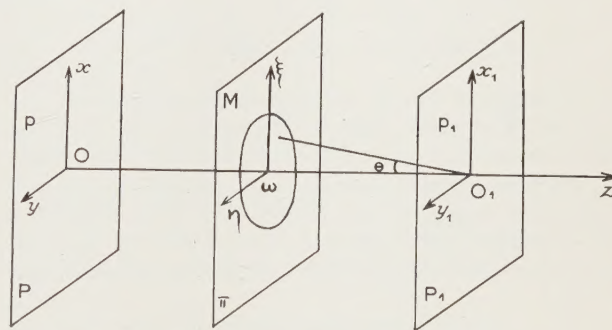


FIG. 1-1.

(l'axe Oz étant normal à P en O) stigmatique et aplanétique (à l'approximation de Gauss) forme l'image de l'objet dans un plan P_1 (fig. 1-1).

Un point p de l'objet sera repéré par ses deux coordonnées x et y par rapport à 2 axes rectangulaires Ox , Oy et un point p_1 de l'image par ses coordonnées x_1 , y_1 par rapport à 2 axes rectangulaires O_1x_1 et O_1y_1 , respectivement parallèles à Ox et Oy . Soit Π le plan de la pupille de sortie de l'instrument d'optique et ω son intersection avec Oz , $\omega\xi$, $\omega\eta$ sont 2 axes respectivement parallèles à Ox et Oy , soient ξ et η les coordonnées d'un point M de Π par rapport à $\omega\xi$ et $\omega\eta$.

La correspondance en amplitude entre P et P_1 est

linéaire. Elle est donc entièrement définie si on connaît, au point p_1 de P_1 , l'amplitude complexe $S(p_1, p)$ qui correspond à un point objet p . En effet, si $A(p)$ est l'amplitude complexe en un point p de l'objet, l'amplitude $A(p_1)$, au point p_1 du plan image, est

$$(1.1) \quad A(p_1) = \int A(p) S(p_1, p) dp.$$

Cette correspondance ne sera un filtre linéaire que si S ne dépend que de $p_1 - p$; $S_1(p_1 - p)$ est alors la réponse percussionnelle du filtre. *C'est donc la distribution d'amplitude $S(p_1, p)$ que je me propose d'étudier.*

2. Calcul de la fonction $S(p_1, p)$. — Je suppose que tous les effets de la diffraction observés dans le plan P_1 sont dus uniquement à la limitation des faisceaux par la pupille de sortie Π ; on pourra donc, si l'on connaît l'amplitude complexe sur la pupille, calculer, par l'application du principe d'HUYGHENS, l'amplitude complexe dans le plan image P_1 .

Dans tout ce qui suit, on supposera que

$$\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{\xi}{d}, \frac{\eta}{d}, \frac{x_1}{d} \quad \text{et} \quad \frac{y_1}{d}$$

(où $d = \omega O_1$) sont suffisamment petits pour que l'on puisse négliger le carré et les puissances supérieures de ces nombres devant l'unité; par contre, on conservera tous les termes de la forme

$$\frac{x^2}{\lambda d}, \frac{y^2}{\lambda d}, \frac{\xi^2}{\lambda d} \dots \frac{x \xi^n}{\lambda d^{(m+n-1)}}$$

où la longueur d'onde λ figure au dénominateur.

Pour calculer l'amplitude en un point courant p_1 du plan image P_1 , nous calculerons d'abord l'amplitude en un point quelconque M de la pupille de sortie Π puis nous appliquerons le principe d'HUYGHENS à cette pupille. Pour obtenir l'amplitude en M , nous passerons par l'intermédiaire de l'image géométrique p' de p .

S'il y avait stigmatisme rigoureux pour tous les points p du domaine central du plan objet (donc aplana-tisme) les surfaces d'ondes dans l'espace image correspondant à un point objet p seraient centrées sur le point image p' et, si on considère un point m situé à une distance R de p' , et plus près de l'objet que p' , la différence de phase entre m et p serait

$$(2.1) \quad \Phi = -\frac{2\pi}{\lambda_1} R + \varphi_{p'} - \varphi_p$$

où φ_p et $\varphi_{p'}$ sont respectivement les phases en p et p' et où λ_1 représente la longueur d'onde dans l'espace image.

En fait, nous ne supposons pas que nous avons un stigmatisme rigoureux. p' sera l'image de p dans l'approximation de GAUSS et il faudra remplacer le terme

$\frac{2\pi}{\lambda_1} R$ par $\frac{2\pi}{\lambda_1} (R + \Delta_1)$ où Δ_1 , supposé petit, dépend à la fois de p' , de R et de la position m du point considéré sur la sphère de rayon R centrée sur p' . Si l'on prend pour m un point M du plan de la pupille Π , nous pourrions dire que Δ_1 dépend de p' et de M . En fait, ce qui nous intéresse, c'est la différence de phase existant entre m et le point objet. D'ailleurs la différence $\varphi_{p'} - \varphi_p$ varie avec le couple de points conjugués considérés; si nous la rapportons à la valeur qu'elle prend pour le point objet sur l'axe, nous sommes conduits à poser

$$(2.2) \quad \varphi_{p'} - \varphi_p = \varphi_o' - \varphi_o - \frac{2\pi}{\lambda_1} \Delta_2$$

où Δ_2 ne dépend que de p c'est-à-dire (nous supposons qu'il y a symétrie de révolution) du rayon polaire $r = Op$. En admettant que $\varphi_{p'} - \varphi_p$ est une fonction régulière de r , Δ_2 ne dépendra que des puissances paires de r . En définitive nous aurons, au terme $\varphi_o' - \varphi_o$ constant près que nous ne réécrivons plus,

$$(2.3) \quad \Phi = -\frac{2\pi}{\lambda_1} (R + \Delta_1 + \Delta_2) = -\frac{2\pi}{\lambda_1} (R + \Delta).$$

Avec les approximations annoncées, l'amplitude complexe sur Π sera ⁽¹⁾

$$(2.4) \quad f(M, p) e^{\frac{2\pi i}{\lambda_1} (R + \Delta)}$$

où $f(M, p)$ fonction réelle du point p et du point M , représente la transparence de la pupille et les propriétés de transmission du système optique. Dans ce qui suit nous supposons que le système optique n'est pas trop ouvert pour que l'on puisse assimiler la fonction f à la transparence $f(M)$ de la pupille de sortie. L'amplitude complexe (à un facteur constant près) diffractée en p_1 par la pupille Π s'écrit :

$$(2.5) \quad S(p_1, p) = \iint_{\Pi} f(\xi, \eta) e^{\frac{2\pi i}{\lambda_1} (R - R_1 + \Delta)} d\xi d\eta$$

où $R_1 = |M p_1|$;

on peut expliciter R et R_1 en fonction des coordonnées polaires r, φ de p ⁽²⁾; φ, θ de M ; r_1, φ_1 de p_1 respectivement dans les plans P, Π et P_1

$$(2.6) \quad R = \sqrt{d^2 + r^2 + \varphi^2 - 2r\varphi \cos(\theta - \varphi)} = d \sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2} + \frac{\varphi^2}{d^2} - 2\frac{r\varphi}{d^2} \cos(\theta - \varphi)}$$

⁽¹⁾ Dans une première version de cette étude je n'avais pas fait figurer le facteur $f(M, p)$. Je remercie le Dr WOLF qui a aimablement attiré mon attention sur ce point qui limitait le champ d'application de ce travail.

⁽²⁾ D'une façon plus précise, dans ce qui suit, r et φ sont les coordonnées de p' image géométrique de p . Mais c'est là un moyen de repérer p .

et

$$(2.7) \quad R_1 = \sqrt{d^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi_1)} = \\ = d \sqrt{1 + \frac{r_1^2}{d^2} + \frac{\rho^2}{d^2} - \frac{2r_1\rho}{d^2} \cos(\theta - \varphi_1)}$$

$\frac{r^2}{d^2}, \frac{\rho^2}{d^2}, \frac{r\rho}{d^2}, \frac{r_1^2}{d^2}, \frac{r_1\rho}{d^2}$ étant petits devant l'unité, on peut

développer R et R_1 en série :

$$R = d \left[1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{d^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{d^2} - \frac{r\rho}{d^2} \cos(\theta - \varphi) - \right. \\ \left. - \frac{3}{4!} \left(\frac{\rho^4}{d^4} - 4 \frac{\rho^3 r}{d^4} \cos(\theta - \varphi) + 2 \frac{r^2 \rho^2}{d^4} (2 + \cos 2(\theta - \varphi)) - \right. \right. \\ \left. \left. - 4 \frac{r^3 \rho}{d^4} \cos(\theta - \varphi) + \frac{r^4}{d^4} \right) + \dots \right]$$

$$R_1 = d \left[1 + \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{d^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{d^2} - \frac{r_1\rho}{d^2} \cos(\theta - \varphi_1) - \right. \\ \left. - \frac{3}{4!} \left(\frac{\rho_4}{d^4} - 4 \frac{\rho^3 r}{d^4} + \cos(\theta - \varphi_1) + 2 \frac{r_1^2 \rho^2}{d^4} (2 + \cos 2(\theta - \varphi_1)) - \right. \right. \\ \left. \left. - 4 \frac{r_1^3 \rho}{d^4} \cos(\theta - \varphi_1) + \frac{r_1^4}{d^4} \right) + \dots \right]$$

on remarque que l'on peut alors écrire

$$(2.8) \quad R - R_1 + \Delta = (A(r) - A(r_1) + \Delta_2) + \Delta_1 + \\ + \delta - \delta_1 - \frac{\rho}{d} [r \cos(\theta - \varphi) - r_1 \cos(\theta - \varphi_1)]$$

ou encore

$$(2.9) \quad R - R_1 + \Delta = (A(r) - A(r_1) + \Delta_2) + \Delta_1 + \\ + \delta - \delta_1 + \frac{1}{d} [\xi(x_1 - x) + \eta(y_1 - y)]$$

où

$$(2.10) \quad A(r) = d \left(\frac{1}{2} \frac{r^2}{d^2} - \frac{3}{4!} \frac{r^4}{d^4} + \dots \right);$$

$$A(r_1) = d \left(\frac{1}{2} \frac{r_1^2}{d^2} - \frac{3}{4!} \frac{r_1^4}{d^4} + \dots \right);$$

$$(2.11) \quad \delta = \frac{3}{4!} \left[4 \frac{\rho^3 r}{d^3} \cos(\theta - \varphi) - \right. \\ \left. - 2 \frac{r^2 \rho^2}{d^3} (2 + \cos 2(\theta - \varphi)) + \right. \\ \left. + 4 \frac{r^3 \rho}{d^3} \cos(\theta - \varphi) \right] + \dots;$$

$$(2.12) \quad \delta_1 = \frac{3}{4!} \left[4 \frac{\rho^3 r_1}{d^3} \cos(\theta - \varphi_1) - \right. \\ \left. - 2 \frac{r^2 \rho^2}{d^3} (2 + \cos 2(\theta - \varphi_1)) + \right. \\ \left. + 4 \frac{r_1^3 \rho}{d^3} \cos(\theta - \varphi_1) \right] + \dots$$

Finalement, on pourra écrire

$$(2.13) \quad S(p_1 p) = e^{\frac{2\pi i}{\lambda_1} (A(r) - A(r_1) + \Delta_2)} \iint f(\xi, \eta) \times \\ \times e^{\frac{2\pi i}{\lambda_1} (\Delta_1 + \delta - \delta_1)} e^{\frac{2\pi i}{\lambda_1 d} [\xi(x - x_1) + \eta(y - y_1)]} d\xi d\eta$$

Pour que la correspondance en amplitude entre l'image et l'objet puisse être considérée comme un filtre linéaire, il est nécessaire que S ne dépende que de $x_1 - x$ et $y_1 - y$; il faut

1) que $\frac{2\pi}{\lambda_1} (A(r) - A(r_1) + \Delta_2)$ soit beaucoup plus petit que l'unité pour que l'on puisse écrire

$$e^{\frac{2\pi i}{\lambda_1} [A(r) - A(r_1) + \Delta_2]} \simeq 1;$$

2) que Δ_1 ne dépende que de la position du point M sur la pupille :

$$\Delta_1 = \psi(\rho);$$

3) que les termes de $\delta - \delta_1$ soient négligeables, sauf ceux de la forme

$$\frac{\rho^{2n+1}}{d^{2n+1}} [r \cos(\theta - \varphi) - r_1 \cos(\theta - \varphi_1)] = \\ = \frac{\rho^{2n}}{d^{2n+1}} [\xi(x_1 - x) + \eta(y_1 - y)]$$

S se met alors sous la forme

$$S(x_1 - x, y_1 - y) = \iint_{\pi} e^{\frac{2\pi i}{\lambda_1} \psi(\rho)} \times \\ \times e^{\frac{2\pi i}{\lambda_1 d} h(\rho) [\xi(x_1 - x) + \eta(y_1 - y)]} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Si, de plus, on peut négliger $\delta - \delta_1$, alors S se présente, avec un choix convenable des unités et paramètres, comme la transformée de FOURIER de la fonction

$e^{\frac{2\pi i}{\lambda_1} \psi(\rho)} f(\xi, \eta)$ définie sur la pupille. D'une façon précise, on prendra comme unité de longueur dans le plan image la longueur d'onde λ_1 dans le vide. Comme déjà fait, on repérera un point du plan objet par les coordonnées de son image géométrique. Il revient au même de dire que le plan objet est mesuré avec une unité $\frac{\lambda_1}{\gamma}$ où γ est le grandissement algébrique correspondant à ces deux plans conjugués.

On repérera un point de la pupille par $u = n \frac{\xi}{d}$

et $v = n \frac{\eta}{d}$ où n est l'indice du milieu image.

En général, comme on le verra ultérieurement, $A(r) - A(r_1) + \frac{\Delta_2}{\lambda_1}$ ne sera pas négligeable, la correspondance ne sera pas un filtre linéaire et S sera défini, en adoptant les unités précédentes, par

$$(2.14) \quad S(p_1, p) = e^{2\pi i (A'(r) - A'(r_1) + \Delta'_2)} \times \iint f(u, v) e^{2\pi i \Delta'} e^{2\pi i (u(x_1 - x) + v(y_1 - y))} du dv$$

avec :

$$(2.15) \quad A'(r) = \frac{\lambda_1}{2d} r^2 - \frac{3}{4!} \frac{\lambda_1^3}{d^3} r^4 + \dots$$

$$(2.16) \quad \Delta'_2 = \alpha'_1 r^2 + \alpha'_2 r^4 + \dots$$

Δ' représentant $\Delta_1 + \delta - \delta_1$ exprimé en fonction de u, v et des unités convenables.

3. Cas particulier. — Dans les formules qui précèdent figurent deux quantités Δ_1 et Δ_2 dont les valeurs n'ont pas été explicitées. Le terme Δ_1 est introduit de façon très courante dans la théorie des aberrations. Le terme Δ_2 est rarement considéré. Je vais, dans le cas relativement simple du *dioptre sphérique*, essayer de préciser son allure.

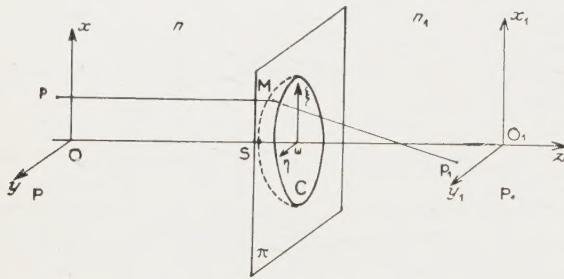


FIG. 3-1.

Un écran plan Π opaque percé d'une ouverture circulaire C , de centre ω et de rayon a , et une calotte sphérique de rayon R , s'appuyant sur le cercle C , partagent l'espace en 2 régions, une région d'indice n et une région d'indice n_1 (fig. 3.1). Soient ωz la normale en ω au plan Π , S le sommet du dioptre formé par la calotte sphérique, P un plan objet normal à ωz en O dans la région d'indice n , P_1 un plan normal à ωz en O_1 dans la région d'indice n_1 .

Soient Ox, Oy 2 axes rectangulaires dans le plan P ; $\omega \xi, \omega \eta$ 2 axes situés dans Π respectivement parallèles à Ox et Oy , O_1x_1, O_1y_1 2 axes du plan P_1 respectivement parallèles à Ox et Oy . Soit $d = OS$ et $d_1 = O_1S$. Si p de coordonnées x, y est un point objet du plan P , M un point du dioptre repéré par 2 coordonnées rectangulaires ξ, η et p_1 un point de coordonnées x_1, y_1 , nous ferons les mêmes approximations que précédemment, c'est-à-dire que nous négligerons les termes du second ordre en

$$\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{\xi}{d}, \frac{\eta}{d}, \frac{\xi}{d_1}, \frac{\eta}{d_1}, \text{ etc.}$$

Pour étudier le dioptre sphérique, je vais appliquer le principe d'HUYGHENS sur une surface infiniment voisine de celle du dioptre, située du côté image. Le raccord entre la variable lumineuse de part et d'autre de la surface du dioptre fait intervenir un coefficient de transmission dont je supposerai qu'il est constant sur toute la surface du dioptre que l'on utilise et que, pour cette raison, je ne ferai pas figurer dans les calculs. L'amplitude complexe en un point p_1 fournie par un point objet p , sera alors, à un facteur constant près :

$$(3.1) \quad S(p_1, p) = \iint e^{-i(kr' + k_1 r'_1)} d\xi d\eta$$

$$\text{où } k = \frac{2\pi n}{\lambda}, \quad k_1 = \frac{2\pi n_1}{\lambda}, \quad r' = |pM|, \quad r'_1 = |p_1M|$$

où λ représente la longueur d'onde dans le vide.

En introduisant les coordonnées polaires r, φ de p ; ρ, θ de M ; r_1, φ_1 de p_1 , on a

$$(3.2) \quad r' =$$

$$= \sqrt{(d+R - \sqrt{R^2 - \rho^2})^2 + \rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)}$$

et

$$(3.3) \quad r'_1 =$$

$$= \sqrt{(d_1 - R + \sqrt{R^2 - \rho^2})^2 + \rho^2 + r_1^2 - 2r_1\rho \cos(\theta - \varphi_1)}$$

ou

$$(3.4) \quad r' = d \times$$

$$\sqrt{\left(1 + \frac{R}{d} - \sqrt{\frac{R^2}{d^2} - \frac{\rho^2}{d^2}}\right)^2 + \frac{\rho^2}{d^2} + \frac{r^2}{d^2} - 2\frac{r\rho}{d^2} \cos(\theta - \varphi)}$$

et

$$(3.5) \quad r'_1 = d_1 \times$$

$$\sqrt{\left(1 - \frac{R}{d_1} + \sqrt{\frac{R^2}{d_1^2} - \frac{\rho^2}{d_1^2}}\right)^2 + \frac{r_1^2}{d_1^2} + \frac{\rho^2}{d_1^2} - 2\frac{r_1\rho}{d_1^2} \cos(\theta - \varphi_1)},$$

on peut alors développer r' et r'_1 en série et on obtient

$$r' = d + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{d}{R}\right) \frac{\rho^2}{d} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{d} - \frac{r\rho}{d} \cos(\theta - \varphi) + \delta' - \frac{3}{4!} \frac{r^4}{d^3} + \dots$$

$$r'_1 = d_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d_1}{R}\right) \frac{\rho^2}{d_1} + \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{d_1} - \frac{r_1\rho}{d_1} \cos(\theta - \varphi_1) + \delta'_1 - \frac{3}{4!} \frac{r_1^4}{d_1^3} + \dots$$

avec

$$\delta' = -\frac{3}{4!} \left\{ \left(1 + 2\frac{d}{R} + \frac{d^3}{R^3}\right) \frac{\rho^4}{d^3} + 2\frac{\rho^2 r^2}{d^3} \left[\left(2 + \frac{d}{R}\right) + \cos 2(\theta - \varphi) \right] - 4\left(1 + \frac{d}{R}\right) \frac{\rho^3 r}{d^3} \cos(\theta - \varphi) - 4\frac{\rho^4 r^3}{d^3} \cos(\theta - \varphi) \right\}$$

et

$$\delta'_1 = -\frac{3}{4!} \left\{ \left(1 - 2 \frac{d_1}{R} + \frac{d_1^3}{R^3} \right) \frac{\rho^4}{d_1^3} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\rho^2 r_1^2}{d_1^3} \left[\left(2 - \frac{d_1}{R} \right) + \cos 2(\theta - \varphi_1) \right] - \right. \\ \left. - 4 \left(1 - \frac{d_1}{R} \right) \frac{\rho^3 r_1}{d_1^3} \cos(\theta - \varphi_1) - 4 \frac{\rho r_1^3}{d_1^3} \cos(\theta - \varphi_1) \right\}$$

et

$$(3.6) \quad k r' + k_1 r'_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ n d + n_1 d_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{d} + \frac{n_1}{d_1} + \frac{n - n_1}{R} \right) \rho^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{d} r^2 + \frac{n_1}{d_1} r_1^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{3}{4!} \left(\frac{n}{d^3} r^4 + \frac{n_1}{d_1^3} r_1^4 \right) - \rho \left[r \frac{n}{d} \cos(\theta - \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + r_1 \frac{n_1}{d_1} \cos(\theta - \varphi_1) \right] + n \delta' + n_1 \delta'_1 + \dots \right\}$$

Si les plans P et P₁ sont conjugués, on a

$$\frac{n}{d} + \frac{n_1}{d_1} = \frac{n_1 - n}{R},$$

donc

$$k r' + k_1 r'_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ n d + n_1 d_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{d} r^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n_1}{d_1} r_1^2 \right) - \frac{3}{4!} \left(\frac{n}{d^3} r^4 + \frac{n_1}{d_1^3} r_1^4 \right) - \xi \left(\frac{n}{d} x + \frac{n_1}{d_1} x_1 \right) + \right. \\ \left. + \eta \left(\frac{n}{d} y + \frac{n_1}{d_1} y_1 \right) + n \delta' + n_1 \delta'_1 + \dots \right\}$$

et, à un facteur constant près, on pourra écrire

$$S(p_1, p) = e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{n}{d} r^2 + \frac{n_1}{d_1} r_1^2 \right) - \frac{3}{4!} \left(\frac{n}{d^3} r^4 + \frac{n_1}{d_1^3} r_1^4 \right) \right]} \times \\ \iint e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} (n \delta' + n_1 \delta'_1)} \times \\ \times e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \left[\xi \left(\frac{n}{d} x + \frac{n_1}{d_1} x_1 \right) + \eta \left(\frac{n}{d} y + \frac{n_1}{d_1} y_1 \right) \right]} d\xi d\eta.$$

En prenant la longueur d'onde λ pour unité de longueur dans le plan image P₁ et λ/γ dans le plan objet P⁽¹⁾, en repérant un point de la pupille (plan tangent au sommet du dioptré) par $u = n_1 \frac{\xi}{d_1}$,

$\nu = n_1 \frac{\eta}{d_1}$ et en se rappelant que $\gamma = -\frac{n d_1}{n_1 d}$, on obtient

$$(3.7) \quad S(p_1, p) = e^{-2\pi i \left[\frac{\lambda}{2 d_1} \left(r_1^2 - \frac{r^2}{\gamma} \right) - \frac{3}{4!} \frac{\lambda^3}{d_1^3} \left(r_1^4 - \left(\frac{n_1}{n} \right)^2 \frac{r^4}{\gamma} \right) \right]} \times \\ \times \iint e^{-2\pi i \Delta_0} e^{2\pi i [u(x_1 - x) + \nu(y_1 - y)]} du d\nu \\ \Delta_0 \text{ représentant } \frac{n \delta' + n_1 \delta'_1}{\lambda} \text{ exprimé dans les unités}$$

(1) Cette convention conduit, comme précédemment, à repérer un point objet par les coordonnées de son image géométrique (cf. p. 54, renvoi).

précédentes, on voit que l'on peut mettre S sous la forme

$$(3.8) \quad S(p_1, p) = e^{2\pi i [A'(r) - A'(r_1) + \Delta'_2]} \\ \iint e^{2\pi i \Delta_0} e^{2\pi i [u(x_1 - x) + \nu(y_1 - y)]} du d\nu$$

avec

$$(3.9) \quad A'(r) = \frac{\lambda}{2 d_1} r^2 - \frac{3}{4!} \frac{\lambda^3}{d_1^3} r^4 + \dots$$

$$(3.10) \quad A'(r_1) = \frac{\lambda}{2 d_1} r_1^2 - \frac{3}{4!} \frac{\lambda^3}{d_1^3} r_1^4 + \dots$$

$$(3.11) \quad \Delta'_2 = -\frac{\lambda}{2 d_1} \frac{\gamma - 1}{\gamma} r^2 + \frac{3}{4!} \frac{\lambda^3}{d_1^3} \frac{\gamma - 1}{\gamma} r^4 + \dots$$

l'équation (3.8) donne, dans le cas du dioptré sphérique, l'amplitude complexe $S(p_1, p)$ en un point p₁ du plan image pour un point objet p. Elle a une forme semblable à l'équation (2.14) qui donne $S(p, p_1)$ pour un système optique centré (la transparence de la pupille étant uniforme); les termes du second ordre sont même identiques et l'équation (3.8) explicite Δ'_2 dans le cas où le système optique se réduit au dioptré sphérique. Mais dans ces équations, les termes d'ordre supérieur à 2 ne peuvent être rendus identiques, c'est-à-dire que Δ_0 ne peut se mettre sous la même forme que Δ' . En effet, dans Δ' , les termes dépendant du point courant p₁, c'est-à-dire ceux contenant r₁ et φ_1 , ont des coefficients indépendants de la géométrie du système optique, ils ne dépendent que de la position de la pupille de sortie; au contraire, ces mêmes termes, dans Δ_0 , ont des coefficients qui dépendent non seulement de la position de la pupille, mais encore de la géométrie du dioptré, c'est-à-dire du rayon de courbure R. Ceci donne à penser que le schéma consistant à localiser les causes de diffractions uniquement sur la pupille de sortie, ne rend probablement pas entièrement compte des termes d'ordre supérieur au second. En résumé, le calcul précédent nous a permis de déterminer dans le cas du dioptré sphérique, la forme du Δ'_2 .

En se limitant au second ordre, on pourra donc écrire, en général,

$$(3.12) \quad S(p_1, p) = e^{2\pi i \left(\frac{\lambda}{2 d_1} (r^2 - r_1^2) + \alpha' r^2 \right)} \\ \iint f(u, \nu, d_1) e^{2\pi i [u(x_1 - x) + \nu(y_1 - y)]} du d\nu$$

$r^2 - r_1^2$ étant des termes dus à la diffraction par la pupille et $2\pi \alpha' r^2$ un terme traduisant la différence de phase $\frac{2\pi}{\lambda} \Delta_2$ introduite au chapitre II et qui, dans le cas du dioptré sphérique, s'écrit $-\frac{\lambda}{2 d_1} \frac{\gamma - 1}{\gamma} r^2$ (λ étant la longueur d'onde dans le vide).

Nous allons encore calculer cette différence de phase dans les cas suivants :

1) lentille mince de distance focale f (fig. 3.2).

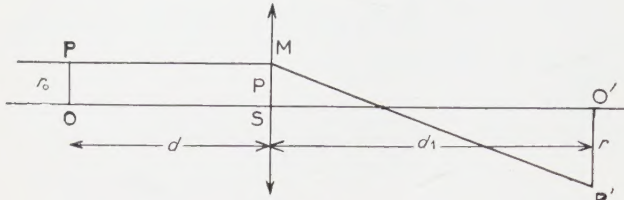


FIG. 3-2.

On suppose que la lentille est suffisamment mince pour que son action en un point M se réduise à diminuer le chemin optique par rapport à S de

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{d} + \frac{1}{d_1} \right] \rho^2 = \frac{1}{2f} \rho^2.$$

On pourrait refaire le même calcul que pour le dioptré sphérique ; mais il est plus commode ici d'adopter une méthode géométrique. On se propose donc d'évaluer la différence de chemin optique entre un rayon allant de O à O' (par exemple O S O') et un rayon allant de p à p' (par exemple p M p', p M étant parallèle à O S), soit $\rho = r_0 = S M = O P$ et $r = O' P'$ il faut évaluer, en se limitant au second ordre, la différence de chemin optique (p M p') - (O S O'), or

$$(O S O') = d + d_1 + \delta$$

où δ est le chemin optique introduit par la lentille en S et (p M p') = p M + δ - $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{d} + \frac{1}{d_1} \right] \rho^2$ + M p' mais

$$M p' = \sqrt{d_1^2 + (\rho - r)^2} \simeq d_1 + \frac{1}{2} \frac{(\rho - r)^2}{d_1} ; p M = d$$

$$(p M p') = d + \delta - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{d} + \frac{1}{d_1} \right] \rho^2 + d_1 + \frac{1}{2} \frac{(\rho - r)^2}{d_1}$$

en prenant les unités précédemment définies, c'est-à-dire λ sur O' p' et $\frac{\lambda}{\gamma}$ sur O p ($\gamma = -\frac{d_1}{d}$) on a :

$$(p M p') = d + d_1 + \delta - \frac{\lambda^2}{2 d_1} \frac{(1 - \gamma)}{\gamma^2} r^2 + \frac{\lambda^2}{2 d_1} \frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma^2} r^2$$

$$(3.13) \quad [p M p'] - [O S O'] = \frac{\lambda^2}{2 d_1} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) r^2$$

avec nos conventions précédentes cela correspond à une différence de phases

$$(\varphi_{p'} - \varphi_p) - (\varphi_{o'} - \varphi_o) = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta_2' = \frac{\lambda^2}{2 d_1} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) r^2 \times \frac{2\pi}{\lambda}$$

donc, pour la lentille mince, $\alpha' = -\frac{\lambda}{2 d_1} \frac{\gamma - 1}{\gamma}$ c'est la même valeur que pour le dioptré sphérique.

2) *Système optique centré.* En se limitant aux termes du second ordre, le même calcul que précédemment

peut se faire à partir des plans principaux du système, et, si la pupille de sortie est confondue avec le plan principal image, on aura toujours $\alpha' = -\frac{\lambda}{2 d_1} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma}$; lorsque la pupille de sortie n'est pas confondue avec le plan principal image, on peut encore montrer qu'il faut prendre $\alpha' = -\frac{\lambda}{2 d_0} \frac{\gamma - 1}{\gamma}$, d_0 étant la distance du plan principal image au plan image.

En définitive, il semble qu'on pourra toujours, si on se limite au second ordre, utiliser l'équation (3.12) en prenant un α' du type $-\frac{\lambda}{2 d_1} \frac{\gamma - 1}{\gamma}$.

4. *Approximation des filtres linéaires.* — Nous allons discuter la question avec plus de soin en prenant exactement les termes mis en évidence par l'étude du dioptré (voir 3.12). Par ailleurs les considérations contenues dans ce chapitre supposent l'éclairage cohérent. Nous verrons, au chapitre 5, comment il faut en modifier les conclusions dans le cas de la cohérence partielle.

Pour que la correspondance objet-image en amplitude soit un filtre linéaire, il faut que, les termes d'ordre supérieur au second étant négligeables, l'exponentielle

$$(4.1) \quad e^{2\pi i \left[\frac{\lambda_1}{2 d_1} (r^2 - r_1^2) - \frac{\lambda_1}{2 d_1} \frac{\gamma - 1}{\gamma} r^2 \right]} = e^{i\pi \frac{\lambda_1}{d_1} \left(\frac{r^2}{\gamma} - r_1^2 \right)}$$

soit équivalente à l'unité. D'ailleurs, l'intégrale du second membre de l'équation (3.12) n'est autre que la tache de diffraction habituelle $s(p_1 - p)$. $s(p_1 - p)$ tend vers zéro si $|p p_1| \rightarrow \infty$ et nous pouvons considérer que s est négligeable si $|p p_1|$ est supérieur à une certaine valeur r_0 qui définit l'ordre de grandeur de l'étalement de la tache de diffraction. Si l'ouverture de la pupille est circulaire et de rayon a , on pourra mettre r_0 sous la forme $r_0 = K 0,61 \frac{d_1}{a}$, K étant un nombre de

l'ordre de quelques unités, $0,61 \frac{d_1}{a}$ étant le rayon du premier anneau de la tache de diffraction (λ_1 étant l'unité de longueur dans P_1) ; avec $K = 5$ par exemple, l'amplitude de la tache de diffraction en un point p_1 extérieur au cercle C centré sur p et de rayon r_0 sera négligeable si on se limite à une précision de l'ordre de 10 pour cent.

Pour que la correspondance soit un filtre linéaire, il faut donc que, pour un point p_1 intérieur au cercle C, (4.1) soit équivalent à l'unité, ou, ce qui revient au même, que $\pi \frac{\lambda_1}{d_1} \left(\frac{r^2}{\gamma} - r_1^2 \right)$ soit beaucoup plus petit que l'unité et cela pour r inférieur à r_m , r_m étant le rayon maximum de l'objet auquel on s'intéresse. Pour que la représentation de la correspondance par un filtre linéaire puisse être utile, il faudra que l'objet contienne sur un rayon r_m un grand nombre de points

séparables, c'est-à-dire que l'on ait $r_m = N \cdot 0,61 \frac{d_1}{a}$ où N , qui représente le nombre maximum de points séparables sur un rayon de l'objet, doit être assez grand.

Je vais calculer le nombre maximum N de points séparables sur un rayon du champ pour l'ensemble desquels, la correspondance objet-image (en amplitude), est un filtre linéaire.

Pour cela, je vais chercher le maximum de $\left| \frac{r^2}{\gamma} - r_1^2 \right|$ en supposant $|p_1 p| \leq r_0$ et $r \leq r_m$.

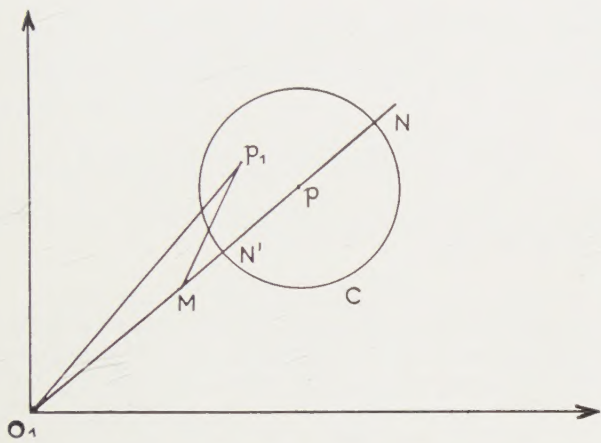


FIG. 4-1.

Suivant les valeurs de γ , on doit envisager plusieurs cas :

1) $\gamma \geq 1$. Soit (fig. 4.1) $\overrightarrow{O_1 M} = \frac{\overrightarrow{O_1 p}}{\sqrt{\gamma}}$.

On a

$$\overrightarrow{O_1 p_1} = \overrightarrow{O_1 M} + \overrightarrow{M p_1}$$

donc

$$|\overrightarrow{O_1 p_1}|^2 = |\overrightarrow{O_1 M}|^2 + |\overrightarrow{M p_1}|^2 + 2 \overrightarrow{O_1 M} \cdot \overrightarrow{M p_1}$$

ou

$$\left| |\overrightarrow{O_1 M}|^2 - |\overrightarrow{O_1 p_1}|^2 \right| = \frac{r^2}{\gamma} - r_1^2 = |\overrightarrow{M p_1}|^2 + 2 \overrightarrow{O_1 M} \cdot \overrightarrow{M p_1}$$

or

$|\overrightarrow{M p_1}|^2 + 2 \overrightarrow{O_1 M} \cdot \overrightarrow{M p_1}$ est maximum lorsque p_1 est en N . Pour une position déterminée du point p le maximum de $\left| \frac{r^2}{\gamma} - r_1^2 \right|$ est donc $\left| (r + r_0)^2 - \frac{r^2}{\gamma} \right|$ qui, avec la condition $r \leq r_m$, atteint son maximum pour $r = r_m$. En définitive, le maximum de $\left| \frac{r^2}{\gamma} - r_1^2 \right|$ est

$$(r_m + r_0)^2 - \frac{r_m^2}{\gamma}.$$

2) $0 < \gamma < 1$. On peut écrire $\frac{r^2}{\gamma} - r_1^2 = \frac{1}{\gamma} (r^2 - \gamma r_1^2)$

et on recherche le maximum de $|r^2 - \gamma r_1^2|$, le même raisonnement que précédemment, fait en remplaçant p

par p_1 , donne pour maximum de $\left| \frac{r^2}{\gamma} - r_1^2 \right|$ la valeur

$$\left(\frac{r_m + r_0}{\gamma} \right)^2 - r_m^2 \text{ en supposant que } r_1 \leq r_m.$$

3) $\gamma < 0$, on peut écrire $\left| \frac{r^2}{\gamma} - r_1^2 \right| = \left| \frac{r^2}{|\gamma|} + r_1^2 \right|$ qui a pour valeur maximum

$$\frac{r_m^2}{|\gamma|} + (r_m + r_0)^2.$$

En résumé, le nombre maximum N de points séparables (sur un rayon de l'objet) pour lesquels la correspondance est un filtre linéaire, doit être tel, que

a) pour $\gamma \geq 1$

$$\pi \frac{\lambda}{d_1} \left(0,61 \frac{d_1}{a} \right)^2 \left[N^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} + 2 K N + K^2 \right] \ll 1$$

ou

$$(4.2) \quad N^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} + 2 K N + K^2 \ll 0,85 \frac{a^2}{d_1 \lambda};$$

b) pour $0 < \gamma < 1$

$$\pi \frac{\lambda}{d_1} \left(0,61 \frac{d_1}{a} \right)^2 \left[N^2 \frac{1 - \gamma}{\gamma} + \frac{2 K N}{\gamma} + \frac{K^2}{\gamma} \right] \ll 1$$

ou :

$$(4.3) \quad N^2 (1 - \gamma) + 2 K N + K^2 \ll \gamma 0,85 \frac{a^2}{d_1 \lambda};$$

c) pour $\gamma < 0$

$$\pi \frac{\lambda}{d_1} \left(0,61 \frac{d_1}{a} \right)^2 \left[N^2 \left(\frac{1}{|\gamma|} + 1 \right) + 2 K N + K^2 \right] \ll 1$$

ou :

$$(4.4) \quad N^2 \left[\frac{1}{|\gamma|} + 1 \right] + 2 K N + K^2 \ll 0,85 \frac{a^2}{d_1 \lambda}.$$

Le graphique (fig. 4.2) donne, par exemple, pour $K = 5$, $\lambda_1 = 0,5 \mu$, $a = 1$ cm, le nombre N en fonction de la distance d_1 (en centimètres), pour des grandissements $\gamma = 1, 10, -10$. Pour établir ce graphique, on a admis que l'argument de l'exponentielle ne devait pas excéder 0,1 et on a limité ce graphique aux valeurs de d pour lesquelles $\frac{a^2}{d^2} \frac{1}{10}$. On remarque alors que, même

dans le cas le plus favorable où $\gamma = 1$ (miroir plan, par exemple), le nombre N n'est que de quelques dizaines d'unités ; pour des grandissements de l'ordre de ± 10 , N n'est de l'ordre que d'une dizaine de points. On peut donc dire, en général, que la correspondance objet-image en amplitude ne peut être assimilée à un filtre linéaire que dans un champ très limité (présentant au maximum sur une direction transversale quelques dizai-

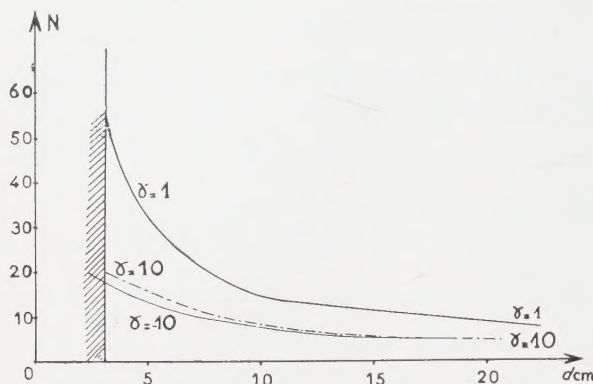


FIG. 4-2.

nes de points séparables), en général, il faudra écrire :

$$S(p_1, p) = e^{2\pi i \left[\frac{\lambda}{2d_1} (r^2 - r_1^2) + \alpha' r^2 \right]} \times \\ \times \iint e^{2\pi i [u(x_1 - x) + v(y_1 - y)]} f(ud, vd) du dv.$$

Ce qui précède délimite, au centre du champ, un domaine circulaire de rayon ρ_1 dans lequel la notion de filtre est utilisable, le gain du filtre ayant l'expression habituelle, c'est-à-dire qu'il est égal à la transpa-

rence de la pupille. Si nous désignons par $e^{\frac{2\pi i \theta}{\lambda}}$ l'exponentielle (4.1) ce domaine a été défini par la condition

$$\left| e^{\frac{2\pi i \theta}{\lambda}} - 1 \right| < 0,1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad |\theta| < \theta_1.$$

On peut se demander si, autour de ce domaine circulaire, on ne pourrait pas définir des domaines annulaires limités par des cercles ρ_1, ρ_2, \dots à l'intérieur de chacun desquels on pourrait encore parler de filtre linéaire, à condition de modifier l'expression du gain (isoplanétisme) [5]. Par exemple, on définirait le premier de ces domaines par la condition $\theta_1 < \theta < \theta_2$, θ_2 étant choisi de telle sorte que l'on ait

$$\left| e^{2\pi i \frac{\theta - \theta_1}{\lambda}} - 1 \right| < 0,1.$$

Au filtre correspondant on associerait par exemple

le gain $e^{\frac{2\pi i \theta_1}{\lambda}}$ multiplié par la valeur habituelle. A priori, cela n'est pas toujours possible. En effet, si γ est égal à 1 ou voisin de 1, il résulte de la forme même de θ , que, quel que soit r , on pourra choisir p_1 dans le cercle C correspondant à p de façon à annuler $\frac{r^2}{\gamma} - r_1^2$

donc θ . Dans ces conditions on ne pourra satisfaire l'inégalité $\theta_1 < \theta < \theta_2$ qu'en prenant $\theta_1 = 0$ et on retrouve le domaine central. On ne peut donc rechercher de tels domaines annulaires que si γ est suffisamment différent de 1. De plus il est bien évident que

l'existence de ces domaines ne présentera un certain intérêt que si $\rho_{m+1} - \rho_m$ contient un nombre suffisant de fois la valeur r_0 .

En supposant γ nettement supérieur à 1 (par exemple $\gamma = 10$) cherchons à délimiter le premier domaine annulaire.

Posons

$$r = \rho_1 + t, \quad r_1 = \rho_1 + t_1.$$

Il faudra que

$$2\pi \frac{\lambda_1}{2d_1} \left| \left[\frac{(\rho_1 + t)^2}{\gamma} - (\rho_1 + t_1)^2 \right] - \left[\frac{\rho_1^2}{\gamma} - \rho_1^2 \right] \right| < 0,1$$

pour

$$0 < t < \rho_2 - \rho_1; \quad -r_0 < t_1 < \rho_2 - \rho_1 + r_0$$

ou

$$\pi \frac{\lambda_1}{d_1} \left| \frac{t^2}{\gamma} - t_1^2 + 2\rho_1 \left(\frac{t}{\gamma} - t_1 \right) \right| < 0,1;$$

on trouve ainsi, pour $\lambda_1 = 0,5 \mu$, $d_1 = 8 \text{ cm}$, $a = 1 \text{ cm}$, $\gamma = 10$, $K = 5$,

$$\rho_2 - \rho_1 \approx 1,4 r_0.$$

Le domaine suivant correspondrait à $\rho_3 - \rho_2$ nettement inférieur à r_0 . En définitive, en se déplaçant suivant un rayon, le domaine central correspond, pour ces valeurs numériques à 10 points séparables, le premier domaine annulaire à 6 points séparables, le deuxième domaine annulaire à 2 points séparables environ. Pour $\gamma = 1$, toutes les autres valeurs numériques étant conservées, le domaine central qui est alors le seul à considérer a un rayon correspondant à 18 points séparables.

5. Application à la formation d'images d'objets partiellement cohérents.

1) Dans le plan P plaçons une source S monochromatique fournissant une vibration de longueur d'onde λ_1 , le système optique centré O_1 fournit de cette source une image dans le plan P_1 .

A un point objet p correspond dans P_1 une tache de diffraction dont l'amplitude complexe est

$$(5.1) \quad S(p_1, p) = e^{i\pi \frac{\lambda}{d_1} \left[\frac{|p|^2}{\gamma} - |p_1|^2 \right]} s_1(p_1 - p)$$

où $s_1(p_1 - p)$ est l'expression de la distribution d'amplitude dans la tache de diffraction que l'on utilise habituellement (transformée de FOURIER de la transparence sur la pupille de sortie) et où $|p|^2$ et $|p_1|^2$ représentent respectivement $|\vec{O p}|^2$ et $|\vec{O_1 p_1}|^2$. Si l'amplitude au point p de la source est $A(p)$, l'amplitude au point p_1 du plan image sera

$$(5.2) \quad A(p_1) = \int A(p) s_1(p_1 - p) \times \\ \times e^{i\pi \frac{\lambda}{d_1} \left[\frac{|p|^2}{\gamma} - |p_1|^2 \right]} dp.$$

La cohérence partielle sur l'image est caractérisée par la covariance $\Gamma_1[p_1, p'_1] = E \{ \mathcal{A}(p_1) \cdot \mathcal{A}^*(p'_1) \}$

(E = espérance mathématique)
et on a

$$(5.3) \quad \Gamma_1[p_1, p'_1] = e^{-i\pi \frac{\lambda_1}{d_1} (|p_1|^2 - |p'_1|^2)} \iint \gamma(p, p') \times e^{i\pi \frac{\lambda_1}{d_1} \left(\frac{|p|^2 - |p'|^2}{\gamma} \right)} \times s_1(p_1 - p) s_1^*(p'_1 - p') dp dp'$$

où $\gamma(p, p') = E \{ A(p) A^*(p') \}$ caractérise la cohérence partielle sur la source.

2. Si on suppose cette source S incohérente (et pas nécessairement uniforme) alors $\gamma(p, p') = \delta(p - p') \sigma(p)$ (où $\sigma(p)$ est l'intensité de la source en p et δ la fonction de DIRAC) alors :

$$(5.4) \quad \Gamma_1(p_1, p'_1) = e^{-i\pi \frac{\lambda_1}{d_1} (|p_1|^2 - |p'_1|^2)} \times \int \sigma(p) s_1(p_1 - p) s_1^*(p'_1 - p) dp.$$

L'intégrale du second membre n'est autre que la cohérence partielle que l'on obtiendrait en supposant le système optique assimilable à un filtre linéaire de réponse percussionnelle $s_1(p_1 - p)$. Soit $C(p_1, p'_1)$ la covariance correspondante, on a

$$(5.5) \quad \Gamma(p_1, p'_1) = e^{-i\pi \frac{\lambda_1}{d_1} (|p_1|^2 - |p'_1|^2)} C(p_1, p'_1).$$

Tout se passe alors comme si, la correspondance entre la source et son image étant un filtre linéaire,

une transparence $e^{-i\pi \frac{\lambda_1}{d_1} |p_1|^2}$ était placée sur l'image.

En plaçant sur P_1 une lentille mince convenable introduisant sur P_1 une phase variable égale à $i\pi \frac{\lambda_1}{d_1} |p_1|^2$ la

cohérence partielle sur P_1 se réduirait à $C(p_1, p'_1)$.

Notons aussi que, si les termes correctifs introduits influent sur l'expression de la cohérence partielle, ils n'ont aucun effet sur la valeur de l'intensité dans le plan image :

$$\Gamma_1(p_1, p_1) = C(p_1, p_1).$$

Si donc, on se préoccupe uniquement de l'intensité dans le plan image, celle-ci s'exprime par

$$\Gamma(p, p) = \int \sigma(p) \left| s_1(p_1 - p) \right|^2 dp$$

on retrouve bien là le filtre en intensité habituel.

3. Examinons maintenant ce qui se passe pour un ensemble : système d'éclairage et système d'observation. Nous supposons que la source S précédemment considérée est incohérente et uniforme, et nous imaginons maintenant que, dans le plan P_1 , se trouve un objet de

transparence $t(P_1)$ dont un système optique O_2 , semblable au précédent, forme l'image dans un plan P_2 , soit d_2 la distance de la pupille de sortie Π_2 de O_2 au plan P_2 nous prendrons $\gamma_2 \lambda_1$ pour unité de longueur dans P_2 (γ_2 est le grandissement fourni par O_2 , λ_1 est la longueur d'onde de la lumière utilisée). L'amplitude, en un point p_2 de P_2 , de la tache de diffraction correspondant à un point objet p_1 sera

$$(5.6) \quad S_2(p_2, p_1) = e^{i\pi \frac{\lambda_1}{d_2} \gamma_2 (|p_1|^2 - \gamma_2 |p_2|^2)} s_2(p_2 - p_1),$$

$S_2(p)$ étant la transformée de FOURIER de la transparence sur la pupille π_2 .

L'amplitude sur P_2 sera

$$(5.7) \quad a(p_2) = \int \mathcal{A}(p_1) t(p_1) \times e^{i\pi \frac{\lambda_1 \gamma_2}{d_2} (|p_1|^2 - \gamma_2 |p_2|^2)} s_2(p_2 - p_1) dp_1$$

et la covariance sur le plan P_2 sera

$$(5.8) \quad \Gamma_2(p_2, p'_2) = e^{-i\pi \frac{\lambda_1 \gamma_2^2}{d_2} (|p_2|^2 - |p'_2|^2)}$$

$$\iint \Gamma_1(p_1, p'_1) t(p_1) t^*(p'_1) \times e^{i\pi \frac{\lambda_1}{d_2} \gamma_2 (|p_1|^2 - |p'_1|^2)} \times s_2(p_2 - p_1) s_2^*(p'_2 - p'_1) dp_1 dp'_1$$

et en utilisant (5.5) compte tenu du fait que S est maintenant uniforme

$$(5.9) \quad \Gamma_2(p_2, p'_2) = e^{-i\pi \frac{\lambda_1}{d_2} \gamma_2^2 (|p_2|^2 - |p'_2|^2)}$$

$$\iint C(p_1 - p'_1) t(p_1) t^*(p'_1) \times e^{i\pi \lambda_1 \left(\frac{\gamma_2}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) (|p_1|^2 - |p'_1|^2)} \times s_2(p_2 - p_1) s_2^*(p'_2 - p'_1) dp_1 dp'_1$$

et l'intensité $I(p_2)$ sur l'image est donnée par

$$(5.10) \quad I(p_2) = \iint C(p_1 - p'_1) t(p_1) t^*(p'_1) e^{i\pi \lambda_1 \left(\frac{\gamma_2}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) (|p_1|^2 - |p'_1|^2)} \times s_2(p_2 - p_1) s_2^*(p'_2 - p'_1) dp_1 dp'_1.$$

Indépendamment de toute hypothèse sur l'ordre de grandeur des termes correctifs contenus dans (5.10), on peut dire ce qui suit :

La formule (5.9) montre que la cohérence partielle Γ_2 peut se calculer en supposant :

a) que les systèmes O_1 et O_2 sont des filtres linéaires de réponses percussionnelles respectives s_1 et s_2 ;

b) que l'objet a une transparence apparente

$$t(p_1) \cdot e^{i\pi \lambda_1 \left(\frac{\gamma_2}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) |p_1|^2} ;$$

3) que sur le plan image se trouve une transparence

$$\text{fictive } e^{-i\pi \frac{\lambda_1}{d_2} \gamma_2^2 |p_2|^2}.$$

De même, pour le calcul de l'intensité sur l'image, tout se passe comme si l'objet avait une transparence

apparente $t(p_1) \times e^{i\pi\lambda_1 \left(\frac{\gamma_2}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) |p_1|^2}$ et si les systèmes O_1 et O_2 étaient des filtres linéaires. Remarquons que si $\gamma_2 = \frac{d_2}{d_1}$ (γ_2 positif) alors la transparence apparente de l'objet devient la transparence réelle $t(p_1)$.

N. B. — Pour les valeurs numériques suivantes : $\lambda_1 = 0,5 \mu$, $d_1 = 4 \text{ cm}$, $d_2 = 20 \text{ cm}$, $\gamma_2 = -10$, rayon maximum de l'objet = $0,5 \text{ mm}$, rayon maximum de l'image = 5 mm , l'argument du terme correctif exponentiel qui multiplie $t(p_1)$ vaut $2\pi \times 18,75$, celui du terme en p_2 vaut $2\pi \times 125$.

Ces valeurs sont très élevées. En fait, ce qui compte, ce n'est pas tant la valeur de ces arguments que leur influence pratique dans les expressions de $I(p_2)$ et de Γ_2 . C'est ce que je vais examiner.

A. Est-il possible de définir un domaine D de l'image sur lequel l'intensité $I(p_2)$ puisse se calculer avec une bonne approximation comme si les systèmes optiques étaient des filtres linéaires ? Il faut, pour cela, que le

facteur $e^{i\pi\lambda_1 (|p_1|^2 - |p_1'|^2) \left(\frac{\gamma_2}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)}$ puisse être considéré comme équivalent à l'unité pour tous les points p_1 , p_1' et p_2 , tels que la fonction

$\varphi(p_1, p_1', p_2) = C(p_1 - p_1') s_2(p_2 - p_1) s^*(p_2 - p_1')$ soit non négligeable. En d'autres termes, il faut que, pour p_2 intérieur à D, et pour $\varphi(p_1, p_1', p_2)$ non négligeable, on ait :

$$(5.11) \quad A = \text{Maximum de } \left| \pi \lambda_1 \left(\frac{\gamma_2}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) (|p_1|^2 - |p_1'|^2) \right| \ll 1.$$

Nous supposons O_1 et O_2 de révolution autour de Oz ; $C(p_1 - p_1')$ est alors négligeable si p_1' est à l'extérieur d'un cercle C_1 de centre p_1 et de rayon $r_0 = K 0,61 d_1/a_1$ (a_1 est le rayon de la pupille de sortie de O_1); de même $s_2(p_2 - p_1)$ et $s_2(p_2 - p_1')$ sont négligeables lorsque p_1 et p_1' sont respectivement extérieurs au cercle C_2 de centre p_2 et de rayon $r_0' = \frac{K 0,61 d_2}{|\gamma_2| a_2}$ (a_2 est le rayon de la pupille de sortie de O_2).

La fonction φ sera donc non négligeable seulement si p_1 est intérieur à C_2 et si p_1' est à la fois intérieur à C_2 et à C_1 (fig. 5.1).

Dans ces conditions, pour évaluer A , nous considérerons deux cas suivant les valeurs respectives de r_0 et r_0' .

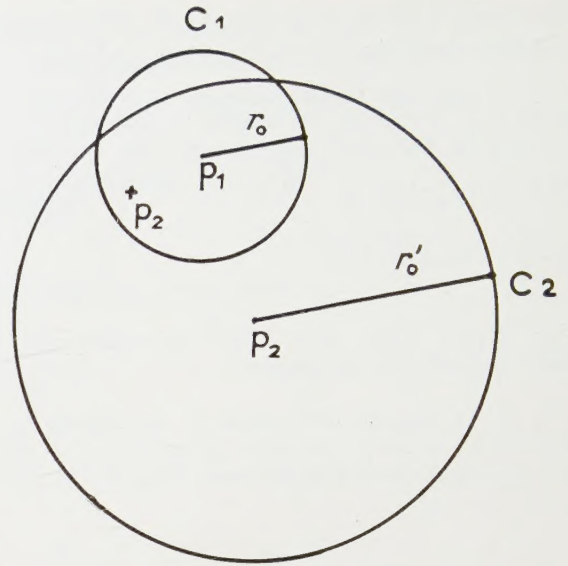


FIG. 5-1.

a) r_0 est plus petit que $2r_0'$ (pour O_2 , l'éclairage se rapproche plus de l'incohérence que de la cohérence), le maximum de $||p_1| - |p_1'||$ est r_0 ; celui de $|p_1| + |p_1'|$ est 2ρ , ρ étant le rayon du cercle limitant D. Puisque $|p_1|^2 - |p_1'|^2 = (|p_1| - |p_1'|)(|p_1| + |p_1'|)$, on est sûr que A ne dépassera pas la valeur :

$$2\pi\lambda_1 \left| \frac{\gamma_2}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right| \rho r_0$$

et, en général, A sera de cet ordre; (5.11) s'écrit donc

$$(5.12) \quad 2\pi\lambda_1 \left| \frac{\gamma_2}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right| \rho r_0 \ll 1,$$

soit :

$$(5.13) \quad \rho \ll \frac{1}{2\pi\lambda_1 \left| \frac{1}{d_1} - \frac{\gamma_2}{d_2} \right| r_0}$$

inégalité qui détermine le rayon maximum de l'image pour lequel les systèmes optiques peuvent être considérés comme des filtres linéaires. Ce rayon augmente lorsque l'éclairage évolue vers l'incohérence, c'est-à-dire lorsque r_0 tend vers 0, il devient infini pour l'incohérence parfaite ce qui est conforme à une remarque précédente.

N. B. — Pour les valeurs numériques suivantes :

$$\lambda_1 = 0,5 \mu, \quad d_1 = 4 \text{ cm}, \quad d_2 = 20 \text{ cm}, \quad \gamma = -10, \quad K = 5, \quad a_2 = 1 \text{ cm}, \quad a_1 > 1 \text{ cm},$$

on trouve

$$\rho/r_0' \ll 59 a_1(\text{cm}).$$

Par exemple, pour $a_1 = 1 \text{ cm}$ et si on admet que la

condition est déjà satisfaite pour un rapport 10 entre les deux membres, il vient

$$\rho/r'_0 = 5,9 ;$$

le rayon ρ est égal à 5,9 fois celui d'une tache. Il correspond à 30 points séparables environ.

b) r_0 est plus grand que $2 r'_0$ (pour O_2 ; l'éclairage se rapproche plus de la cohérence que de l'incohérence), le maximum de $||\rho_1| - |\rho'_1||$ est alors $2 r'_0$ et (5.11) devient

$$4 \pi \lambda_1 \left| \frac{1}{d_1} - \frac{\gamma_2}{d_2} \right| \rho r'_0 \ll 1$$

où

$$(5.14) \quad \rho \ll \frac{1}{4 \pi \lambda_1 \left| \frac{1}{d_1} - \frac{\gamma_2}{d_2} \right| r'_0}.$$

N. B. — Pour les mêmes valeurs numériques que précédemment à l'exception de a_1 qui est maintenant supposé inférieur à 1 cm on trouve, quel que soit a_1 , $\rho \simeq 6 r'_0$, ce qui correspond à environ 30 points séparables sur un rayon de D.

En résumé, on peut toujours définir le domaine \mathcal{Q} ; il est indépendant de l'état de cohérence si $r_0 > 2 r'_0$. \mathcal{Q} tend vers l'infini si on se rapproche de l'incohérence.

B. *Influence des termes correctifs sur Γ_2 .* Discutons la question qualitativement. Donnons-nous les points p_2 et p'_2 . Les points p_1 qui contribuent à l'amplitude en p_2 sont ceux qui sont intérieurs au cercle C'_2 de centre p_2 et de rayon r'_0 . Ceux qui contribuent à l'amplitude en p'_2 sont ceux qui sont intérieurs à un cercle C'_2 de centre p'_2 et de rayon r'_0 . L'intégrale contenue dans (5.9) sera différente de zéro s'il existe des points de C_2 qui sont distants de moins de r_0 de points de C'_2 .

Pour $p_2 = p'_2$, on retrouve la discussion relative à l'intensité que nous venons de faire. Si p_2 est très voisin de p'_2 , les résultats de cette discussion sont encore approximativement valables. La nouveauté est que, si r_0 est assez grand, on pourra considérer des couples de points (p_2, p'_2) et (p_1, p'_1) tels que $|p_2 p'_2|$ et $|p_1 p'_1|$ soient assez grands et manifestement les termes exponentiels ne seront plus négligeables.

En fait une discussion que je ne reproduis pas ici montre que les termes correctifs prennent rapidement de l'importance dans Γ_2 dès qu'on s'éloigne de l'incohérence.

Conclusion. — En conclusion, on peut dire que la correspondance en amplitude entre l'objet et l'image n'est qu'assez grossièrement représentée par un filtre linéaire. Il est plus exact de la représenter par une relation linéaire du type (4.1) avec

$$S(p_1, p) = e^{2i\pi \left(\frac{\lambda_1}{2d_1} (r^2 - r_1^2) + \alpha' r^2 \right)} s(p_1 - p)$$

$s(p_1 - p)$ étant la tache de diffraction habituelle (diffraction à l'infini).

Un dernier exemple montrera l'importance du facteur correctif $e^{2i\pi \left(\frac{\lambda_1}{2d_1} (r^2 - r_1^2) + \alpha' r^2 \right)}$. Soit un objectif de microscope d'ouverture $\sin u = 0,3$, pour un grandissement 10, en observant en lumière monochromatique de $\lambda = 0,5 \mu$, en supposant que le rayon maximum de l'image donnée par l'objectif est de 5 mm et que l'image est à 10 cm de la pupille de sortie, alors la phase

$$2\pi \left(\frac{\lambda}{2d_1} (r^2 - r_1^2) + \alpha' r^2 \right) = \pi \frac{\lambda}{d_1} \left(\frac{r^2}{\gamma} - r_1^2 \right)$$

varie du centre au bord de l'image de 1 700 radians. Cependant on a vu que si l'on ne s'intéresse qu'à l'intensité sur l'image il est en général possible, pour un état de cohérence donné sur l'objet, de définir un domaine central de l'objet pour lequel tout se passe comme si l'on avait affaire à des filtres linéaires; de plus, ce domaine s'étend lorsque l'éclairage s'approche de l'incohérence, il peut alors couvrir toute l'image. Par contre l'expression de la cohérence partielle sur l'image est en général fortement affectée par la présence des termes correctifs introduits.

Enfin, on a montré que l'on pouvait, dans tous les cas, calculer l'intensité sur l'image en supposant les systèmes optiques assimilables à des filtres linéaires et en supposant que l'objet a une transparence appa-

rente de la forme $t(p) e^{i\pi \frac{\lambda_1}{d_1} (|p|^2)}$ où $t(p)$ est la transparence réelle.

Je tiens à remercier M. A. BLANC-LAPIERRE, professeur à la Faculté des Sciences d'Alger, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et les conseils qu'il m'a donné.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BLANC-LAPIERRE et P. DUMONTET : La notion de cohérence en optique, *Rev. Opt.* **34**, 1955, p. 1.
- [2] H. H. HOPKINS : *Proc. Roy. Soc. A*, **208**, 1951, p. 263.
H. H. HOPKINS : *Proc. Roy. Soc. A*, **217**, 1953, p. 403.
- [3] E. WOLF : *Proc. Roy. Soc. A*, **225**, 1954, p. 96.
- [4] P. M. DUFFIEUX : *L'intégrale de FOURIER et son application à l'optique*, chez l'auteur, Besançon (1946).
- [5] E. H. LINFOOT et P. B. FELLGETT : On the assessment of optical images, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, n° 931, fév. 1955.

Manuscrit reçu le 24 janvier 1955.

Geometrical optics of toroidal junctions in configuration lenses *

LAURA RONCHI

Centro per lo Studio della Fisica delle Microonde, Firenze

SUMMARY. — The geometrical behaviour of toroidal junctions between conical coaxial surfaces is analysed. It is found that these junctions behave like lenses, and generally like thick lenses. The exact geometrical behaviour of such lenses is determined (Eq. 24) and also the location of their principal points (Eqs. 30 and 37) and the third order spherical aberration (Eq. 41). Graphs and tables of numerical data are given for the particular case in which the image-cone is reduced to a disk.

SOMMAIRE. — Etude de l'optique géométrique des jonctions toroïdales des surfaces coniques coaxiales. Ces jonctions se comportent comme des lentilles et généralement comme des lentilles minces. Etude des points cardinaux (Equ. 24, 30 et 37) et des aberrations du 3^e ordre (Equ. 41).

Graphiques et données numériques pour le cas particulier où l'image est réduite à un disque.

ZUSAMMENFASSUNG. — Das geometrische Verhalten toroidischer Gebilde von konischen achsenzentrierten Flächen wird analysiert. Es ergibt sich, dass solche Gebilde sich wie Linsen verhalten, und zwar im allgemeinen wie dicke Linsen. Die genauen geometrischen Beziehungen solcher Linsen werden durch Gl. 24 bestimmt, ebenso die Lage der Hauptpunkte durch die Gl. 30 und 37 und die Abweichungen dritter Ordnung durch Gl. 41.

Einige Kurven und Zahlentafeln zeigen den besonderen Fall, bei dem der Bildkegel zu einer Scheibe entartet ist.

I. Introduction. — Microwave lenses consisting of two metal plates kept at a constant spacing have been called « configuration lenses » [1].

The particular case of configuration lenses of revolution appears to be of major interest. An extensive analysis of such lenses has been recently carried out by G. TORALDO DI FRANCIA [2]. Among the lenses giving perfect collimation we find the R. C. A. "lamp-shade" [3] (fig.1), which collimates over a cone of 60° aperture,

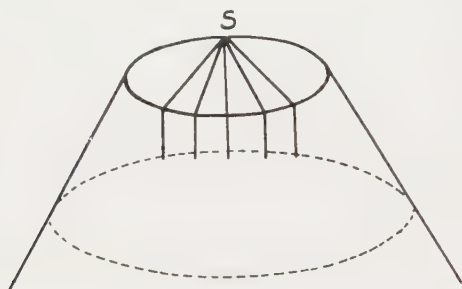


FIG. 1.

the RINEHART-LUNEBERG lens [4] (fig.2) and the one described by TORALDO DI FRANCIA [2] (fig.3) both of which collimate over a plane base, located outside or inside the lens, respectively.

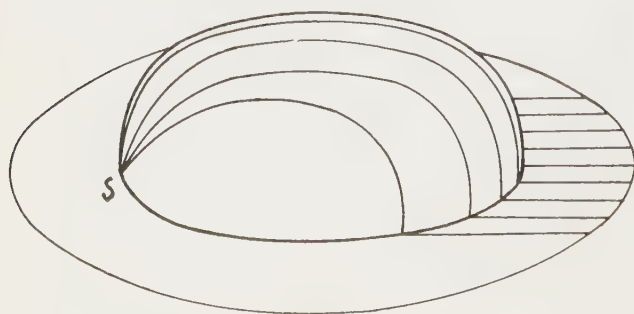


FIG. 2.

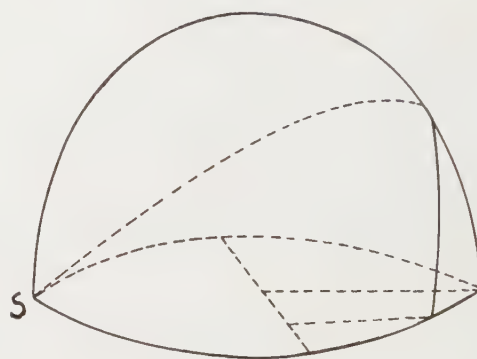


FIG. 3.

Other systems which, while not mathematically perfect, still meet the requirement of a practically negligible aberration have been proposed by MYERS [5]. Some of these systems, of the confection-refraction type, have been recently investigated by TORALDO DI FRANCIA [6] (fig.4). The same author has developed [7] the so-called confection doublets of figure 5.

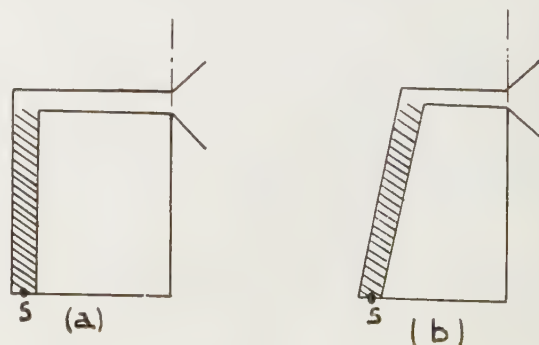


FIG. 4.

* Through sponsorship of the European Office Air Research and Development Command, United States Air Force.

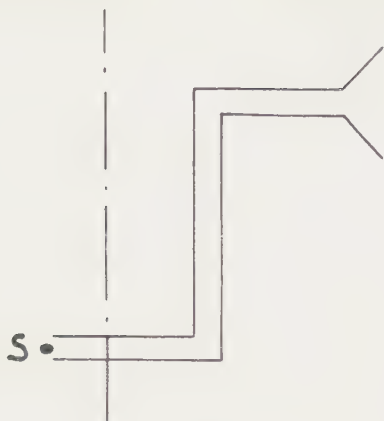


FIG. 5.

All configuration lenses of revolution which give perfect collimation consist of a central core and a cone. The cone is joined to the core along the latter's end parallel, which acts also as a feed-line. The plane tangent to the surface along this line presents a discontinuity. Discontinuities of this type are present also in the lenses shown in figure 4 and figure 5. Consequently, in order to obtain a better impedance matching, it appears advisable not to join the core and the cone directly, but rather by means of a suitable zone, such that the continuity of its tangent plane holds at all points. The most natural solution to this problem appears to be that offered by a toroidal junction. We have therefore studied in general the aberrations introduced by toroidal junctions between two surfaces with axial symmetry. Once the geometrical behaviour of such junctions is known, it becomes possible to determine the small alterations to be introduced in the aforesaid configuration lenses so as to meet the requirements of a good scanning.

We shall be interested solely in the effects due to the torus. Accordingly the two surfaces of revolution to be joined will be replaced by the cones tangent to them along the end parallels of the junction.

II. Sign conventions. — Let us consider two coaxial cones joined by a toroidal zone. The meridional cross-section is shown in figure 6. The surface will be specified by the following quantities:

- ρ_0 : radius of the meridional circle of the torus,
- ρ : distance between the center of this circle and the axis of rotation,
- α_1, α_2 : semi-apertures of the two cones.

In the following computation, we shall often find it convenient to introduce as auxiliary parameters the radii $AB = r_1$ and $CD = r_2$, which are related to the preceding ones by the formulae

$$(1) \quad r_1 = \rho + \rho_0 \cos \alpha_1 \quad r_2 = \rho + \rho_0 \cos \alpha_2$$

and also the quantities

$$(2) \quad R = r_1 / \sin \alpha_1 \quad R' = r_2 / \sin \alpha_2$$

whose geometrical significance is readily apparent (fig. 6). If the two cones are developed on a plane, the two lines of junction between torus and cones (i. e. the two common parallels γ and γ') are transformed into two circles of radii R and R' , respectively. Let us now make the following conventions:

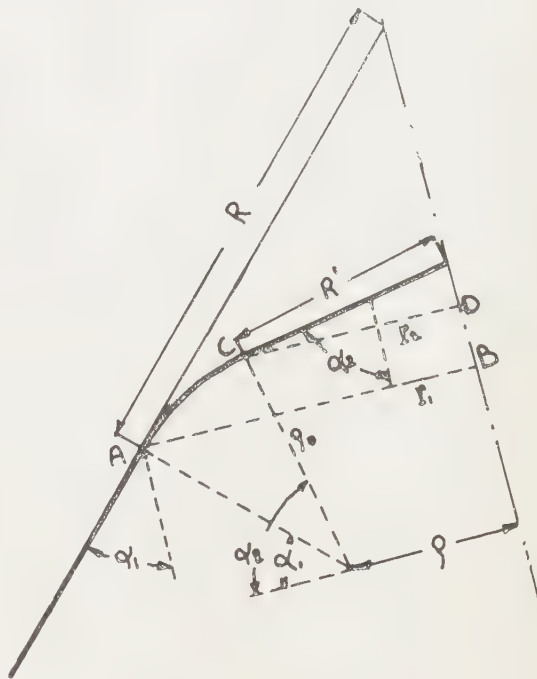


FIG. 6.

The radius ρ_0 of the meridional circle of the torus is counted as positive if the junction is concave towards the axis of rotation; negative in the opposite case. Should neither of the above conditions be verified, we shall consider the total line of junction as consisting of two arcs, one of which belongs to a circle of positive radius, and the other to a circle of negative radius.

Radii R and R' are counted as positive if the radiation travels towards the axis of the cone; negative in the opposite case.

From (2), it follows that the semi-apertures of the cones will be subject to the same sign conventions.

We assume the dielectric, and hence the refractive index, to be the same all over the space in which the field travels. It follows that the « rays » are the geodesics of the surface under consideration.

We shall call object-cone and image-cone, respectively, the cone on which the source is located, and the cone on which the image (real or virtual) is formed.

We define as a « principal ray » the one which coincides with the meridional curve passing through the source. Given the axial symmetry of the system, each meridional curve may be regarded as the axis, or in other words, there are no secondary axes, as each

behaves like a principal one; however, in order to follow the standard conventions of geometrical optics, we shall denote by « axis » the meridional curve which contains the source, and « paraxial » the rays or geodesics which lie close to the principal ray.

The paraxial rays generally come to a focus at a point on the axis, which we shall call the « paraxial image ». Spherical aberration is the distance of the paraxial image from the point where any ray intersects the axis.

Our problem consists then in determining, first the equations for the geodesics, then the Gauss's cardinal elements of the system, and, finally, the spherical aberration.

We note that, given the axial symmetry of the system, the spherical aberration does not depend on the azimuth of the source, so that off-axis aberrations do not enter into our picture. A 2π -angle can be scanned simply by moving the source along a parallel: owing to the symmetry such a procedure does not affect the collimation of the rays.

III. General remarks on geodesics. — Let a point P of a general figure of revolution (Fig. 7) be specified by means of its distance l from any chosen origin measured along the arc of a meridional curve, and by the angle θ included by the meridional plane on which the point is located and any other meridional plane chosen as reference, say, the plane of the drawing. Let r be the distance of P from the axis of revolution.

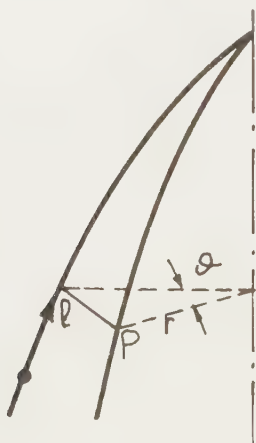


FIG. 7.

We shall assume that the equation for the meridional curve be given in the form $r = r(l)$.

Any line lying on the surface is defined once the function $\theta = \theta(l)$ is known (l having been taken as independent variable). In particular, if the line is a geodesic, the function $\theta = \theta(l)$ can be determined, as the path between two points is then stationary. The EULER equation for this particular variational problem readily yields

$$(3) \quad r \, d\theta/dl = C (r^2 - C^2)^{-1/2}$$

where C is an arbitrary constant, and therefore

$$(4) \quad \theta - \theta_0 = \int_{l_0}^l \frac{C}{r(r^2 - C^2)^{1/2}} \, dl$$

Equation (4) represents the family of geodesics passing through point $P_0(l_0, \theta_0)$, each of these being specified by a given value of the constant C . According to CLAIRAUT's theorem, the product $r \cdot \sin i$ has a constant value along each geodesic (i being the angle made by the geodesic and the corresponding meridional curve). It is readily apparent from (3) that this value is precisely C , so that the equality

$$(5) \quad r \cdot \sin i = C$$

must hold along each geodesic.

We note that the above considerations apply in general to any figure of revolution: our next step consists in studying in particular the geodesics of the surface represented in figure 6. Each geodesic can be divided into three portions: the first on the object-cone, the second on the torus, and the third on the image-cone.

Now, given a ray on the object-cone, we have to determine its behaviour on the image-cone.

Figure 8 shows the two cones developed on the same plane. The source S is located on the axis of symmetry, which represents the principal ray. Along the line of junction γ between object-cone and torus, a point P will be specified by means of the length h of the arc OP . According to our sign convention, h is positive in figure 8.

Now consider a geodesic SP on the object-cone, forming an angle i with the generating line passing through P . From (5) we have

$$(6) \quad \sin i = \frac{C}{r_1}$$

Along the axis of the two cones a point will be specified by means of its distances from O and O' , respectively; the sign convention is that these distances are positive in the direction of propagation of the ray. From the triangle SVP , setting $OS = p$, we have

$$(7) \quad \frac{-p + R}{R} = \frac{\sin i}{\sin VSP} = \frac{\sin i}{\sin \left(i - \frac{h}{R} \right)}$$

By substituting (6) into (7), we readily derive C as a function of h and p

$$(8) \quad \frac{C}{r_1} = \left(1 - \frac{R}{p} \right) \sin \frac{h}{R} \left[1 - 2 \frac{R^2}{p^2} \left(1 - \frac{p}{R} \right) \left(\cos \frac{h}{R} - 1 \right) \right]^{-1/2}$$

A very convenient expression for C may be derived by expanding the right-hand side of (8) as a power series of h/R , and taking into account only first and third order terms. This procedure leads to

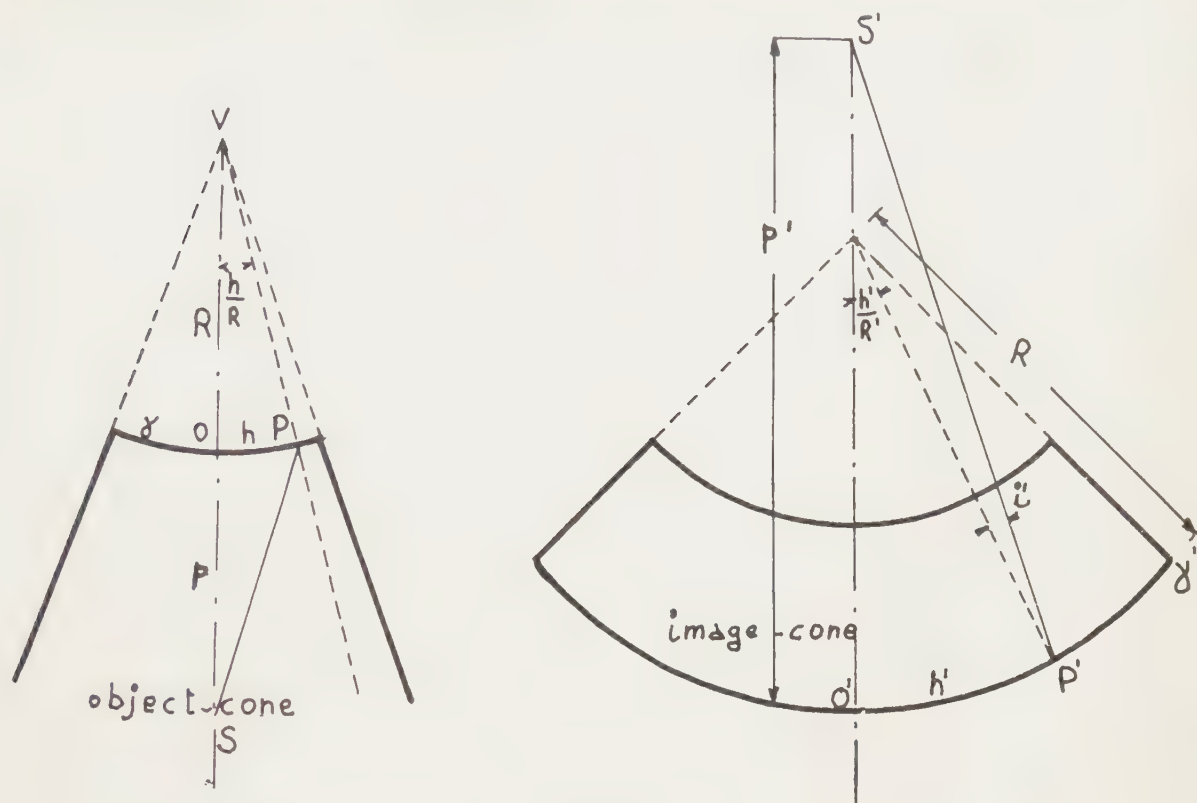


FIG. 8.

$$(9) \quad C = r_1 \left(1 - \frac{R}{p}\right) \frac{h}{R} \left[1 - \frac{1}{6} \left(1 - 3 \frac{R}{p} + 3 \frac{R^2}{p^2}\right) \frac{h^2}{R^2}\right].$$

The geodesic under consideration, from P onwards, lies on the torus, until it intercepts γ' at P'. Let us call h' the length of the arc O'P'. The relationship between h' and h depends on the angle of incidence i , and also on the geometrical characteristics of the torus, and will be investigated in the following sections.

At P' the geodesic passes on to the image-cone. Let S' be the point of intersection with the axis. The angle $i' = \angle V'P'S'$, in view of (5), is given by

$$(10) \quad \sin i' = \frac{C}{r_2}.$$

From the above relation, recalling (8), we may derive i' as a function of both h and p . If we then set $O'S' = p'$, we find from the triangle S'V'P' (fig. 8)

$$(11) \quad \frac{p' - R'}{R'} = \frac{\sin i'}{\sin \angle V'S'P'} = \frac{\sin i'}{\sin \left(\frac{h'}{R'} - i'\right)}$$

Once h' is known as a function of h , from the preceding relations we may derive p' as a function both of h and p .

IV. Geodesics on the torus. — Let us then determine the relationship between h and h' . The ratio $A = h'/h$ is an even function of h ; in fact, if h is changed into $-h$, the algebraic sign of h' is also reversed. From figure 9 we readily deduce

$$(12) \quad h' = r_2 \theta_2$$

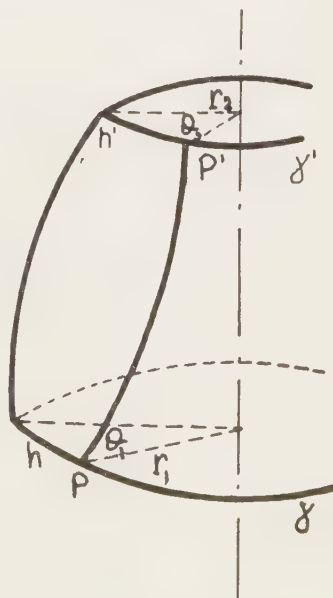


FIG. 9.

where θ_2 indicates the value of the coordinate θ at point P'. Now, r_2 is given by (1); thus our next task is to compute θ_2 as a function of h . Recalling (4) we write

$$(13) \quad \theta_2 - \theta_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{C}{r(r^2 - C^2)^{1/2}} d\theta$$

which shows that θ_2 is a function of h both through C and θ_1 .

From figure 9 we see that

$$(14) \quad \theta_1 = \frac{h}{r_1}.$$

Referring to figure 10, let us now introduce the angle α . We have

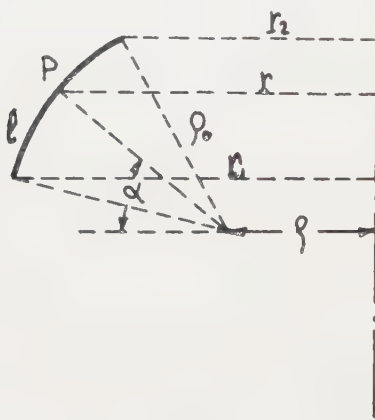


FIG. 10.

$$r = \rho + \rho_0 \cos \alpha \quad d\ell = \rho_0 d\alpha$$

and (13) becomes

$$(15) \quad \theta_2 - \theta_1 = I(\alpha_2) - I(\alpha_1)$$

where we have set

$$(16) \quad I(\alpha) = \int \frac{\rho_0 C}{(\rho + \rho_0 \cos \alpha) \sqrt{(\rho + \rho_0 \cos \alpha)^2 - C^2}} d\alpha.$$

Let us now expand $I(\alpha)$ as a power series of h , taking into account only first and third order terms. To this end, recalling that C is an infinitesimal of the same order as h , we shall first expand the integrand which appears in (16) in terms of C , then integrate the first and third order terms in C , and finally express C as a function of h , through (9). We have

$$(17) \quad I(\alpha) = C \rho_0 I_1(\alpha) + \frac{1}{2} C^3 \rho_0 I_3(\alpha)$$

where

$$I_1(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{(\rho + \rho_0 \cos \alpha)^2}$$

and

$$I_3(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{(\rho + \rho_0 \cos \alpha)^4}.$$

We readily derive

$$(18) \quad I_1(\alpha) = (\rho^2 - \rho_0^2)^{-3/2} [\rho \varphi - \rho_0 \sin \varphi]$$

and

$$(19) \quad I_3(\alpha) = \frac{1}{2} (\rho^2 - \rho_0^2)^{-7/2} \left[(3\rho_0^2 + 2\rho^2) \rho \varphi - \rho_0 \sin \varphi \left\{ \frac{4}{3} \rho_0^2 + 6\rho^2 - 3\rho\rho_0 \cos \varphi + \frac{2}{3} \rho_0^2 \cos^2 \varphi \right\} \right]$$

where

$$(20) \quad \varphi = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0}} \tan \frac{1}{2} \alpha \right].$$

Substitution of (17) into (15) leads to

$$\theta_2 = \theta_1 + C \rho_0 [I_1(\alpha_2) - I_1(\alpha_1)] + \frac{1}{2} C^3 \rho_0 [I_3(\alpha_2) - I_3(\alpha_1)].$$

Finally, from (12), (14) and (9) we have

$$(21) \quad h' = r_2 \theta_2 = A_0(p) h + A_2(p) \frac{1}{R^2} h^3$$

where

$$(22) \quad A_0(p) = \frac{r_2}{r_1} + r_2 \sin \alpha_1 \cdot \rho_0 \left(1 - \frac{R}{p} \right) [I_1(\alpha_2) - I_1(\alpha_1)]$$

and

$$(23) \quad A_2(p) = -\frac{1}{6} r_2 \sin \alpha_1 \rho_0 \left(1 - \frac{R}{p} \right) \times \\ \times \left[\left(1 - 3 \frac{R}{p} + 3 \frac{R^2}{p^2} \right) \{ I_1(\alpha_2) - I_1(\alpha_1) \} - \right. \\ \left. - 3 r_1^2 \left(1 - \frac{R}{p} \right)^2 \{ I_3(\alpha_2) - I_3(\alpha_1) \} \right].$$

Equation (21) combined with (22) and (23) gives the required relation between h and h' to a third order approximation with respect to h .

V. Exact computation of the integral $I(\alpha)$. — An exact computation of the integral $I(\alpha)$ given by (16) can also be carried out. Setting

$$x = \sqrt{\frac{\rho - \rho_0 + C}{\rho + \rho_0 + C}} \tan \frac{1}{2} \alpha$$

the integral $I(\alpha)$ becomes

$$(24) \quad I(\alpha) = C K_1 \left[(\rho + \rho_0) \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + K_2^2 x^2}} - 2 \rho_0 \int \frac{dx}{(1 + K_3^2 x^2) \sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + K_2^2 x^2}} \right]$$

where

$$K_1 = \frac{2 \rho_0}{(\rho^2 - \rho_0^2) \sqrt{\rho^2 - (\rho_0 - C)^2}},$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{\rho^2 - (\rho_0 + C)^2}{\rho^2 - (\rho_0 - C)^2}},$$

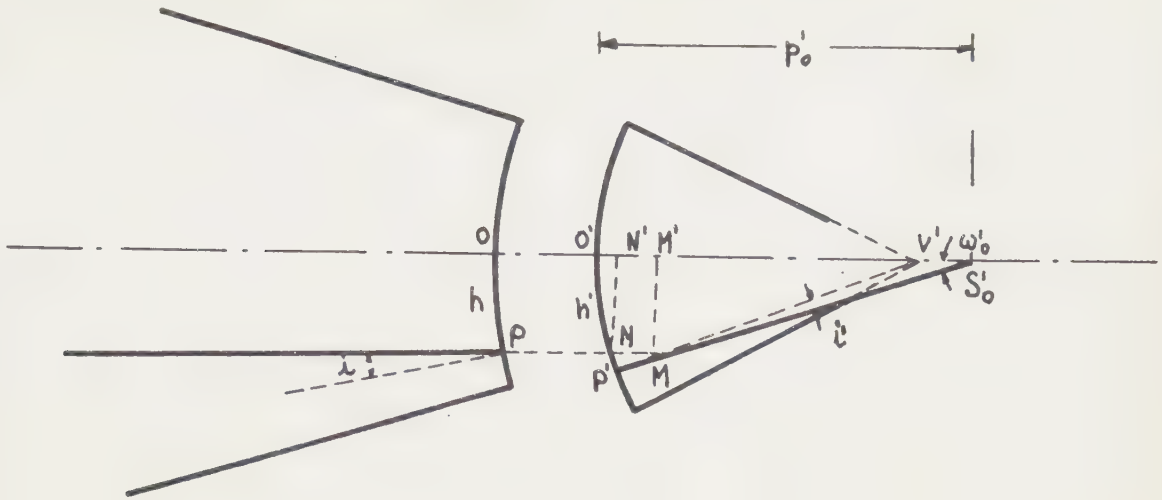


FIG. 11.

$$K_3 = \sqrt{\frac{1 - \frac{C}{p + p_0}}{1 - \frac{C}{p - p_0}}}.$$

The integrals which appear on the right hand side of (24) are elliptic integrals, of the first and third kind respectively, of real modulus K_2 , and imaginary amplitude; in fact, in order that the integrand assume the canonical form, it is necessary to operate the substitution $x = it$.

VI. Determination of the cardinal elements. — Figure 11 shows the two cones developed on the same plane, and located so that their axes coincide. They are of course separated by an arbitrary interval, as the toroidal junction is not developable.

The toroidal zone behaves like a lens (in general like a thick lens). In order to determine its Gaussian elements, we shall adopt the standard methods of geometrical optics. To this end, only first order approximation will be taken into account, both in the present and in the following sections.

Let us then consider on the object-cone (fig. 11) a paraxial ray, parallel to the axis OO' . By setting $p = \infty$, from (9) and (2) we derive

$$(25) \quad C = \frac{r_1}{R} h = h \sin \alpha_1$$

from (22)

$$(26) \quad A_0(\infty) = \frac{r_2}{r_1} + p_0 r_2 \sin \alpha_1 [I_1(\alpha_2) - I_1(\alpha_1)]$$

and therefore, from (21)

$$(27) \quad h' = A_0(\infty) h.$$

Recalling (14), (10) and the preceding equations, we have (denoting by p'_0 the paraxial value of p')

$$(28) \quad p'_0 = r_2 \frac{A_0(\infty)}{A_0(\infty) \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}.$$

We now continue the incident ray until it intersects at M the emerging ray $P'S'_0$. The projection M' of M on the $O'V'$ axis is, by definition, one of the two principal points of the system. Let N be the point at which the continuation of the incident ray intersects V' and N' the projection of N on the axis. In our approximation we have $N' \equiv O'$. The next step is to compute the distance $d' = MN = M'N'$. If ω'_0 be the angle $O'S'_0P'$, we find from the triangle MNP' (which to a first approximation may be considered to be right-angled at P')

$$d' = NP'/\omega'_0.$$

Since $\omega'_0 = h'/R' - i'$, and $NP' \simeq h' - h$, recalling (10) we find

$$(29) \quad d' = r_2 \frac{A_0(\infty) - 1}{A_0(\infty) \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}.$$

The distance between S' and M' (i. e. the focal length) is thus expressed by

$$(30) \quad f = p'_0 - d' = r_2 \frac{1}{A_0(\infty) \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}$$

where $A_0(\infty)$ is given by (26).

Similarly, let us now consider a paraxial ray on the image-cone (fig. 12), parallel to the axis of symmetry. In this case we have

$$(31) \quad i' = h'/R'$$

and therefore, in view of (10)

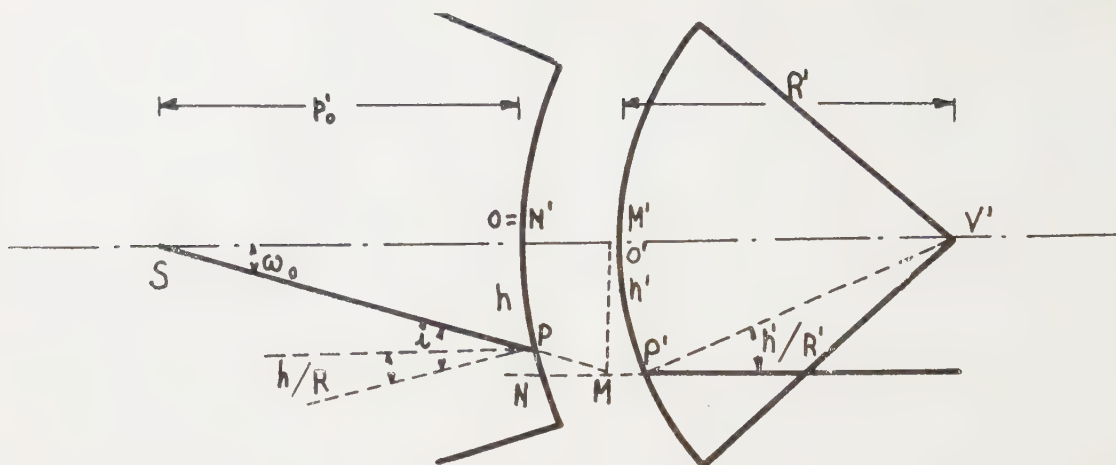


FIG. 12.

$$(32) \quad C = r_2 i' - \frac{r_2}{R'} h' = h' \sin \alpha_2.$$

We now want to determine the value of p for which (31) and (32) hold; this value we denote by p_F . From (6) and (21) we deduce

$$i = \frac{h'}{r_1} \sin \alpha_2 = \frac{1}{r_1} \sin \alpha_2 \cdot A_0(p_F) h$$

from (7)

$$-p_F \left(i - \frac{h}{R} \right) - h$$

and therefore

$$(33) \quad -p_F = r_1 \frac{1}{A_0(p_F) \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}.$$

In order to determine the distance of the second principal point from 0, we proceed as above, by continuing both the incident ray and the one emerging from the torus. We find

$$(34) \quad d = \frac{h' - h}{i - \frac{h}{R}} = r_1 \frac{A_0(p_F) - 1}{A_0(p_F) \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}.$$

We note that both (33) and (34) contain the term $A_0(p_F)$. Equations (22) and (33) yield

$$A_0(p_F) = \frac{r_2}{r_1} + r_2 \sin \alpha_1 \cdot \varphi_0 [I_1(\alpha_2) - I_1(\alpha_1)] + \\ + r_2 \varphi_0 [A_0(p_F) \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1] [I_1(\alpha_2) - I_1(\alpha_1)]$$

and therefore, in view of (26)

$$A_0(p_F) = A_0(\infty) + \\ + r_2 \varphi_0 [A_0(p_F) \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1] [I_1(\alpha_2) - I_1(\alpha_1)].$$

Turning once more to (26), we may rewrite the above result as

$$(35) A_0(p_F) = A_0(\infty) + \\ + \frac{1}{\sin \alpha_1} [A_0(p_F) \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1] \left[A_0(\infty) - \frac{r_2}{r_1} \right].$$

Further, by using (35) it is possible to prove the validity of the relation

$$(36) \quad A_0(\infty) \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 = \\ = \frac{r_2}{r_1} \frac{1}{A_0(p_F)} [A_0(p_F) \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1]$$

and thus write

$$(37) \quad d = f \left[1 - \frac{1}{A_0(p_F)} \right].$$

Finally, we readily derive the relation

$$-p_F + d = f.$$

VII. Relation between two conjugated points. —

Let us now examine the general case, in which the source is neither located at the focus nor at infinity. To a first approximation, we find from (9)

$$C = \sin \alpha_1 \cdot h \left(1 - \frac{R}{p} \right)$$

from (10)

$$i' = \frac{C}{r_2} = \sin \alpha_1 \cdot \frac{h}{r_2} \left(1 - \frac{R}{p} \right)$$

and from (11)

$$p'_0 \left(\frac{h'}{R'} - i' \right) = h'$$

where p'_0 denotes, as before, the paraxial part of p' . Substituting into the latter equation the preceding one, and recalling (21), we have

$$(38) \quad \frac{A_0(p)}{R'} - \sin \alpha_1 \cdot \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R}{p} \right) = \frac{A_0(p)}{p'_0}.$$

Iterating the procedure used to derive (35), we now deduce from (22)

$$(39) \quad A_0(p) = A_0(\infty) - \frac{R}{p} \left[A_0(\infty) - \frac{r_2}{r_1} \right].$$

We now set

$$\begin{aligned} x &= p - d \\ x' &= p' - d' \end{aligned}$$

where d and d' are given by (37) and (29), respectively. It is readily apparent that x and x' represent, with the appropriate sign, the distances of the source and of the paraxial image from the two principal points. Making the above substitution, and recalling the relations previously found, (38) turns into

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$$

as was to be expected.

VIII. Spherical aberration. — If now we take into account also the third order terms in (9) and in (10), we deduce from (11)

$$(40) \quad p' = p_0' - p_2' \frac{h'^2}{R'^2}$$

where

$$\begin{aligned} (41) \quad p_2' &= \frac{p_0'^2(p)}{A_0^3(p)} \frac{R'^2}{R^3} \frac{r_1}{r_2} \left(1 - \frac{R}{p} \right) A_2(p) - \\ &- \frac{1}{6} A_0^3(p) \frac{R^2}{R'^2} - \frac{1}{2} A_0(p) \left[\frac{R}{R'} \frac{r_1}{r_2} \left(1 - \frac{R}{p} \right) A_0(p) - \right. \\ &\left. - \frac{r_1^2}{r_2^2} \left(1 - \frac{R}{p} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(1 - 3 \frac{R}{p} + 3 \frac{R^2}{p^2} \right) \right], \end{aligned}$$

where p_0' is given by (38).

been applied to numerical computations in the particular case of a cone-disk system, i. e., of a system in which the semi-aperture of the image-cone has the prefixed value of 90° . This case is particularly interesting in view of practical applications, as lenses which collimate over a plane surface, rather than over a cone, are generally required for scanning.

We have therefore evaluated numerically the Gaussian elements given by formulae (29), (30) and (37) for a number of values of the semi-aperture α_1 of the object cone, and of the radius ρ_0 of the meridional circle of the toroidal junction. The distance ρ of the centre of the meridional circle from the axis of rotation has been assumed as unit of length. Following the sign convention mentioned in § 2, we have set $\alpha_2 = +90^\circ$, when ρ_0 was positive, and $\alpha_2 = -90^\circ$ when ρ_0 was negative. For the sake of clarity, we have drawn in figure 13 the four cases corresponding to $\rho_0 \geq 0$ and $\alpha_1 \geq 0$.

In figure 14, $1/f$ has been plotted against α_1 , for various values of ρ_0 . Similarly figure 15 shows $1/f$ as a function of ρ_0 , for various values of α_1 . Numerical data referring to these two families of curves are tabulated in Table I.

Figures 16, 17, and figures 18, 19 give instead the analogous graphs for d and d' , respectively. The corresponding numerical data are collected in Tables II and III.

We have then computed the value of the coefficient p_2' of the third order aberration, given by (41), for the particular case of a source located at infinity ($p = \infty$). Results are shown in figures 20 and 21 (see also Table IV).

It is interesting to note that, if ρ_0 is positive, p_2' vanishes, not only in the trivial case $\alpha_1 = 0$, but also at $\alpha_1 \simeq 30^\circ$ (fig. 20).

Now, a confection lens whose parameters are $\alpha_1 = 30^\circ$,

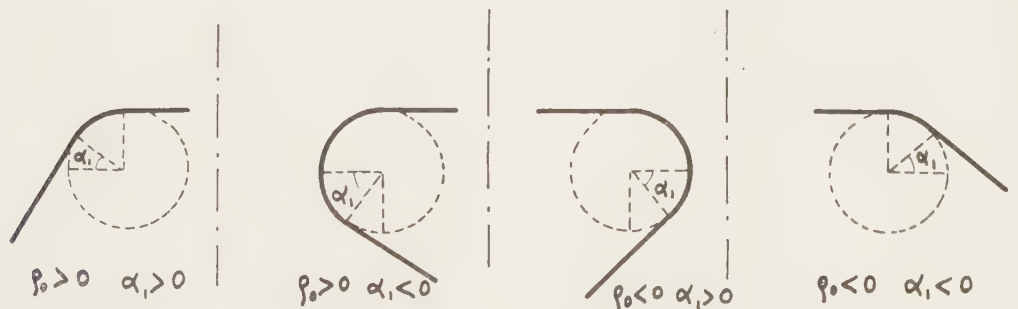


FIG. 13.

The difference $p' - p_0'$ is the third order longitudinal aberration; $A_0(p)$ and $A_2(p)$ are given by (39) and (23), respectively.

IX. Numerical computations in some particular cases. — The formulae derived in the preceding sections have

$\alpha_2 = 90^\circ$ and $\rho_0 = 0$, is none other than the R. C. A. « lamp-shade » (fig. 1); it is well known that when the source is located on the cone at infinity, the lens brings all impinging rays to a sharp focus at the point

$$p' = p_0' - 2r_2 = 2 \quad (r_2 = 1)$$

TABLE I. — $1//$

$\rho_0 \backslash \alpha_1$	-90°	-60°	-30°	0°	30°	60°	90°
-0.3	0.000	-0.150	-0.632	-1.429	-2.379	-3.176	-3.494
-0.2	0.000	-0.144	-0.580	-1.250	-1.999	-2.601	-2.837
-0.15	0.000	-0.141	-0.558	-1.176	-1.848	-2.376	-2.580
-0.1	0.000	-0.139	-0.537	-1.111	-1.717	-2.182	-2.359
-0.05	0.000	-0.136	-0.518	-1.053	-1.602	-2.014	-2.168
0	0.000	-0.134	-0.500	-1.000	-1.500	-1.866	-2.000
$+0$	2.000	1.866	1.500	1.000	0.500	0.134	0.000
$+0.05$	1.852	1.736	1.410	0.952	0.483	0.132	0.000
$+0.1$	1.722	1.620	1.329	0.909	0.468	0.129	0.000
$+0.15$	1.605	1.517	1.256	0.870	0.454	0.127	0.000
$+0.2$	1.501	1.425	1.191	0.833	0.440	0.125	0.000
$+0.3$	1.323	1.267	1.077	0.769	0.416	0.121	0.000

TABLE II. — d

$\rho_0 \backslash \alpha_1$	-90°	-60°	-30°	0°	30°	60°	90°
-0.3		0.0513	0.1022	0.1561	0.2193	0.3030	0.4276
-0.2		0.0346	0.0697	0.1078	0.1526	0.2108	0.2950
-0.15		0.0261	0.0529	0.0822	0.1167	0.1613	0.2249
-0.1		0.0174	0.0356	0.0553	0.0792	0.1096	0.1524
-0.05		0.0088	0.0180	0.0282	0.0403	0.0558	0.0774
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$+0.05$	0.0797	0.0577	0.0416	0.0289	0.0183	0.0088	
$+0.1$	0.1616	0.1172	0.0843	0.0583	0.0367	0.0173	
$+0.15$	0.2460	0.1786	0.1282	0.0886	0.0557	0.0268	
$+0.2$	0.3325	0.2417	0.1731	0.1193	0.0747	0.0358	
$+0.3$	0.5121	0.3728	0.2660	0.1823	0.1136	0.0541	

TABLE III. — d'

$\rho_0 \backslash \alpha_1$	-90°	-60°	-30°	0°	30°	60°	90°
-0.3		0.1056	0.2087	0.3000	0.3695	0.4124	0.4276
-0.2		0.0700	0.1383	0.2000	0.2495	0.2825	0.2950
-0.15		0.0524	0.1035	0.1500	0.1883	0.2147	0.2249
-0.1		0.0349	0.0688	0.1000	0.1262	0.1449	0.1524
-0.05		0.0174	0.0343	0.0500	0.0634	0.0733	0.0774
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$+0.05$	0.0797	0.0750	0.0641	0.0500	0.0342	0.0173	
$+0.1$	0.1616	0.1515	0.1287	0.1000	0.0683	0.0350	
$+0.15$	0.2460	0.2297	0.1940	0.1500	0.1021	0.0519	
$+0.2$	0.3325	0.3093	0.2598	0.2000	0.1358	0.0690	
$+0.3$	0.5121	0.4729	0.3928	0.3000	0.2030	0.1032	

TABLE IV. — p_2'

$\rho_0 \backslash \alpha_1$	-60°	-30°	-15°	0°	15°	30°	60°
-0.15	-0.820	0.000	+0.026	0.000	-0.039	-0.075	-0.119
-0.1	-0.810	0.000	+0.027	0.000	-0.043	-0.086	-0.143
-0.05	-0.799	0.000	+0.027	0.000	-0.048	-0.097	-0.173
0	-0.789	0.000	+0.028	0.000	-0.052	-0.111	-0.211
$+0$	0.211	0.111	0.052	0.000	-0.028	0.000	0.789
$+0.05$	0.260	0.126	0.057	0.000	-0.029	0.000	0.779
$+0.1$	0.323	0.143	0.062	0.000	-0.029	0.000	0.770
$+0.15$	0.407	0.163	0.067	0.000	-0.030	0.000	0.760

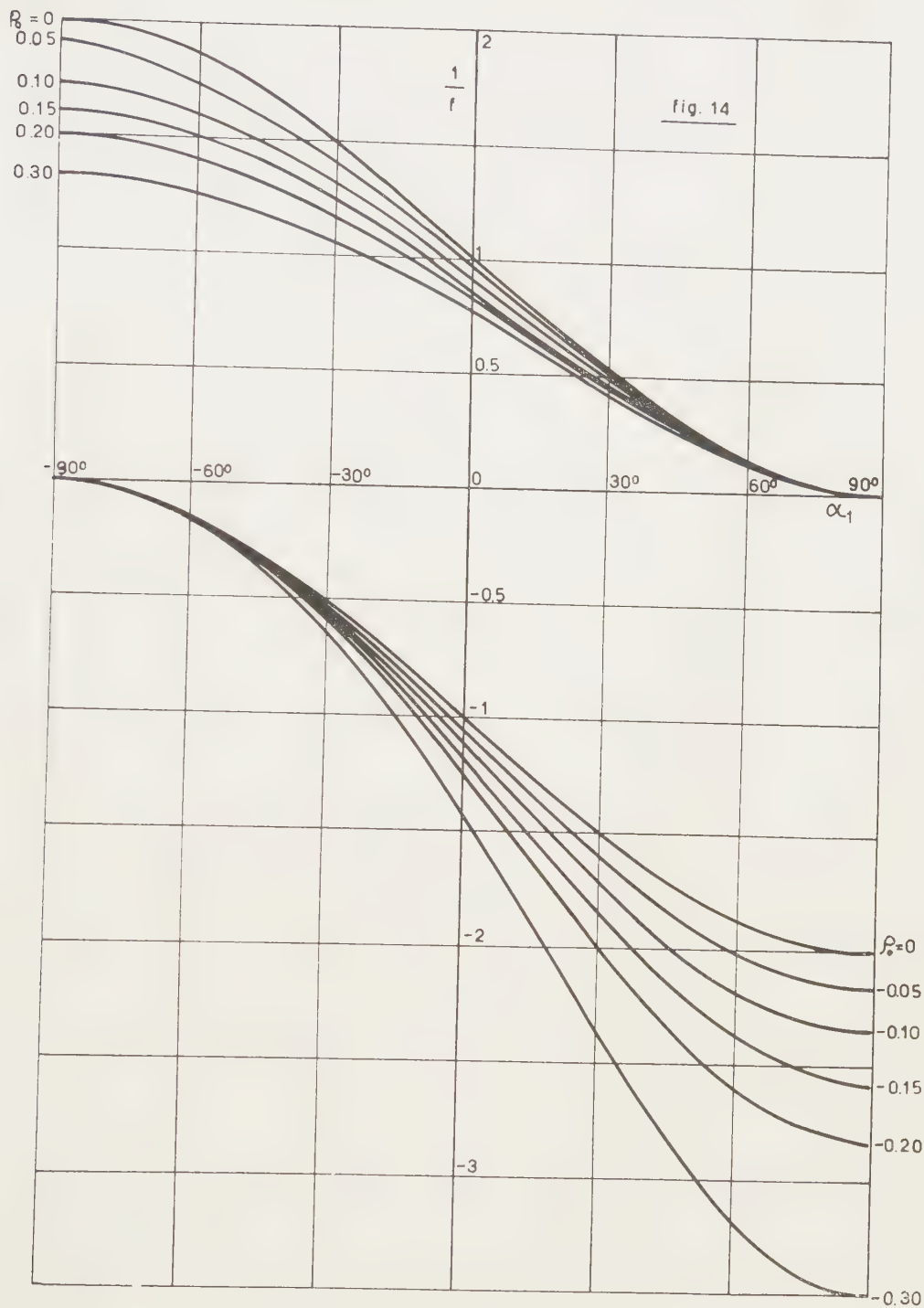


FIG. 14.

(i. e. on the edge of the disk).

From the results of our numerical computation, we thus deduce that, practically, no spherical aberration

is introduced in the R. C. A. lens by the insertion of a toroidal junction.

On the other hand, the focal length changes (fig. 15).

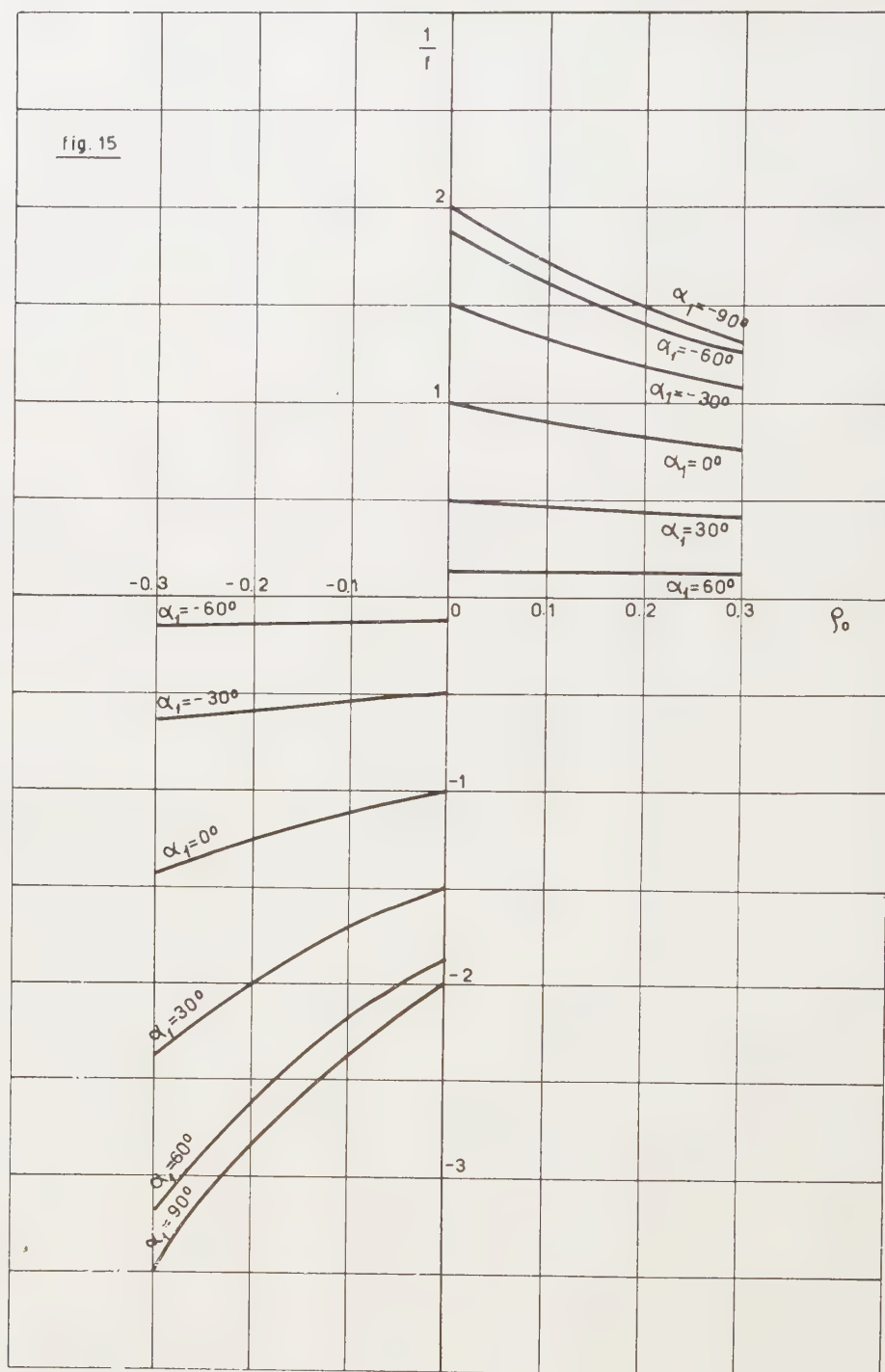


FIG. 15.

and the image is displaced. The variation of p'_0 as a function of ρ_0 is approximately linear (fig. 22).

The reverse case $\alpha_1 = -30^\circ$, $\rho_0 < 0$ is less inter-

esting for practical purposes.

X. Conclusions. — We may conclude that toroidal junctions behave in general like thick lenses. The

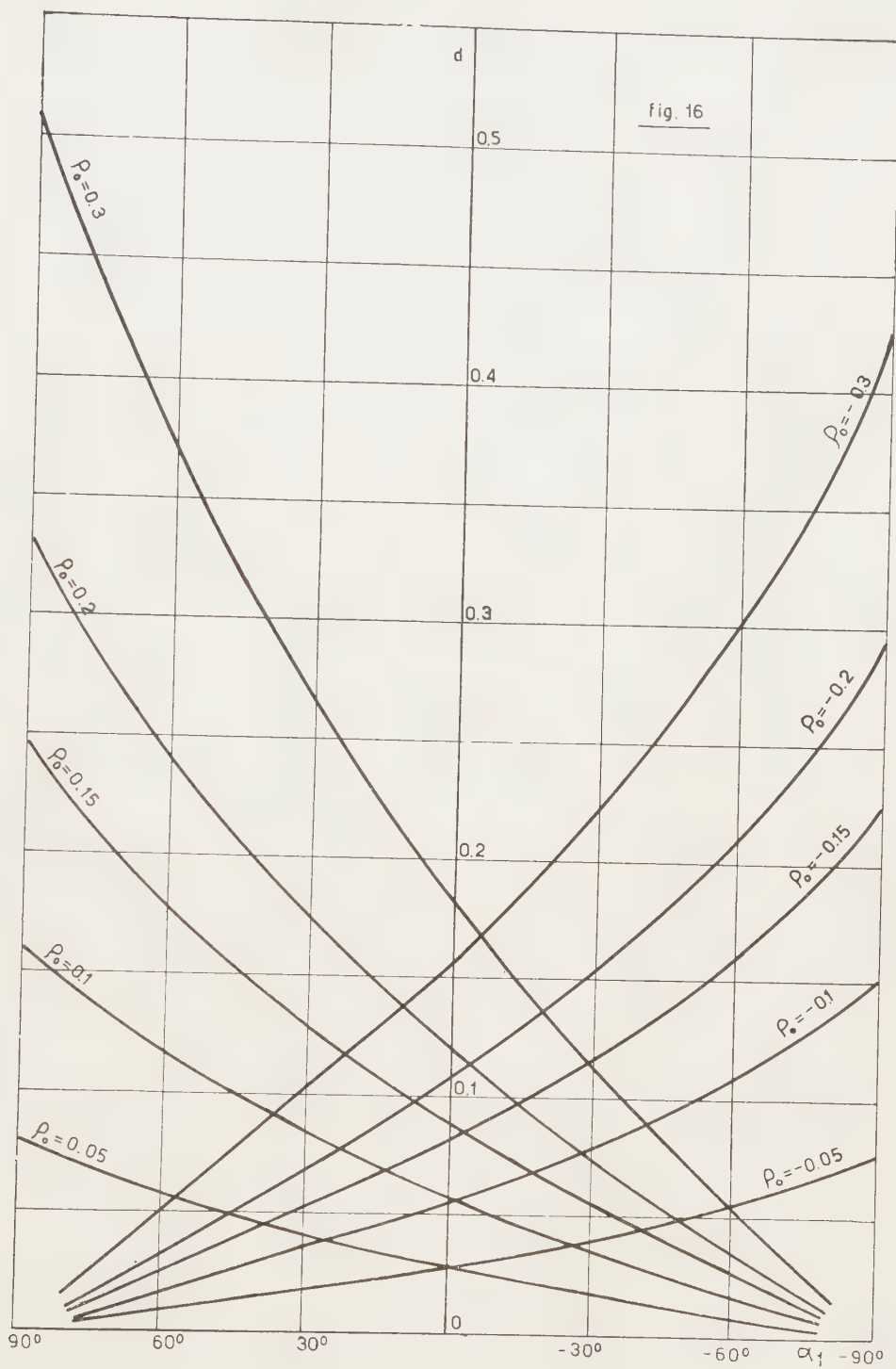


FIG. 16.

principal points coincide only in the case $\rho_0 = 0$, for which we have $d = d' = 0$: this result was already known [7].

From the standpoint of geometrical optics, such systems are completely determined by the formulae (24), (29) (30) (37) and (41), which give the exact geome-



FIG. 17.

trical behaviour (24), the Gaussian elements (29), (30) and (37), and the third order spherical aberration (41), respectively.

It follows that in a confection lens the substitution of a junction to the theoretical line of discontinuity (which corresponds to the limiting case $\rho_0 = 0$) causes

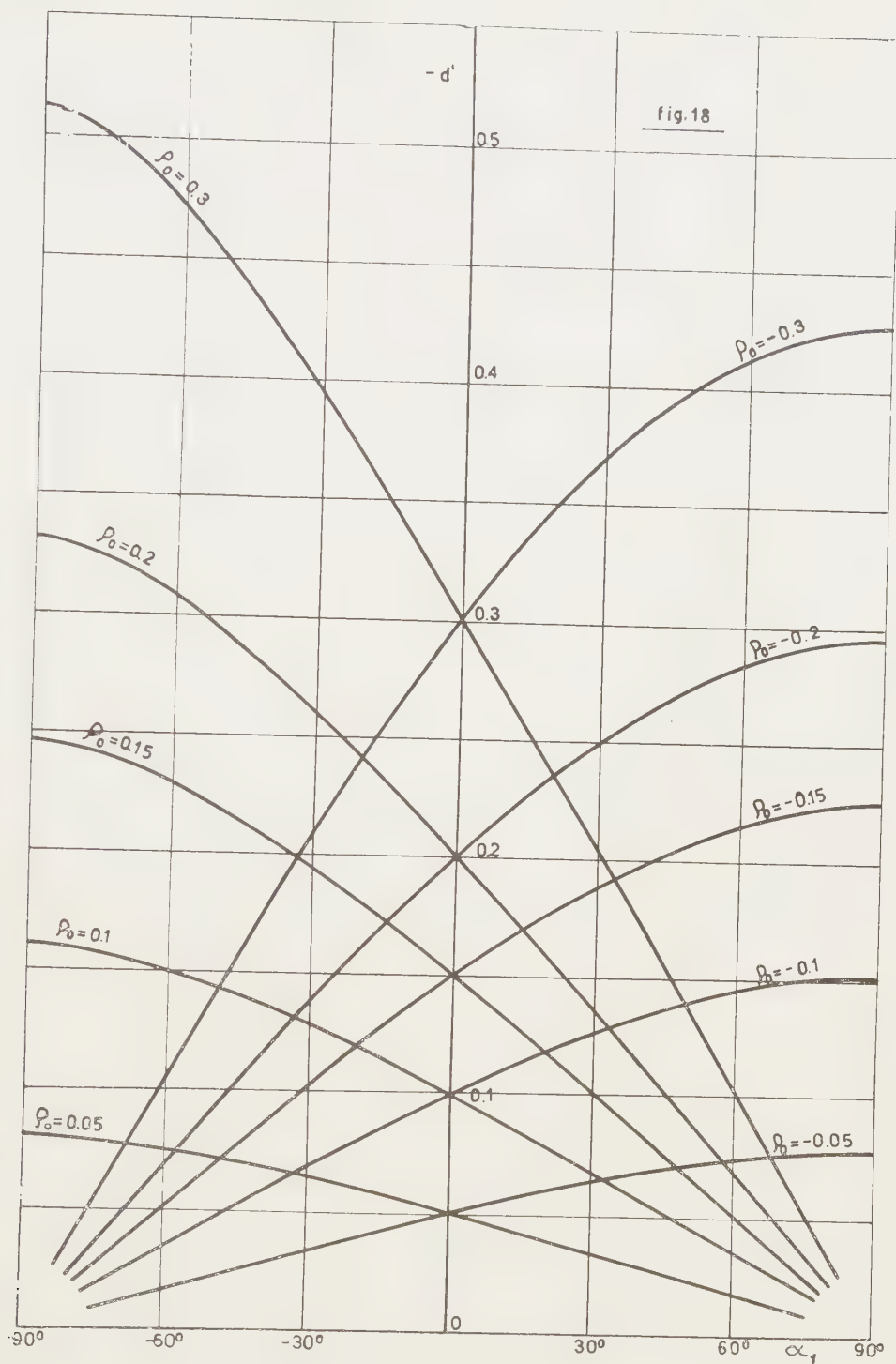


FIG. 18.

a change in the focal length of the lens itself, so that, in general, it becomes necessary to introduce some alterations either in the configuration of the core, or

in the aperture of the image-cone, in order to preserve the collimation of the paraxial rays.

The particular modifications necessary for the

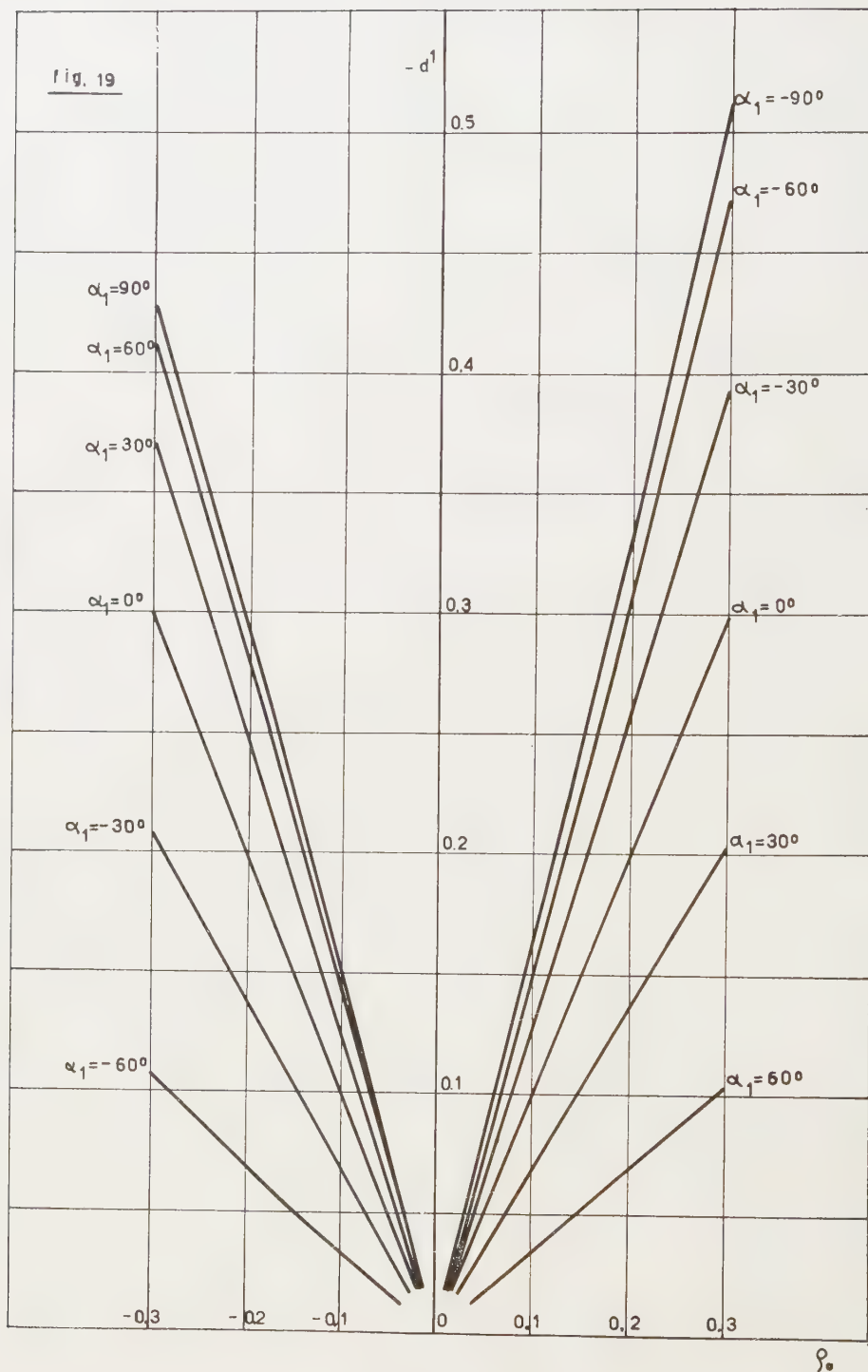


FIG. 19.

RINEHART-LUNEBERG lens and for the TORALDO lens which give perfect collimation (fig. 2,3) as well as for the confection doublet (fig. 5) will form the subject

matter of a further study. Our analysis will also include the R. C. A. lens.

I wish to express my thanks to Professor G. To-

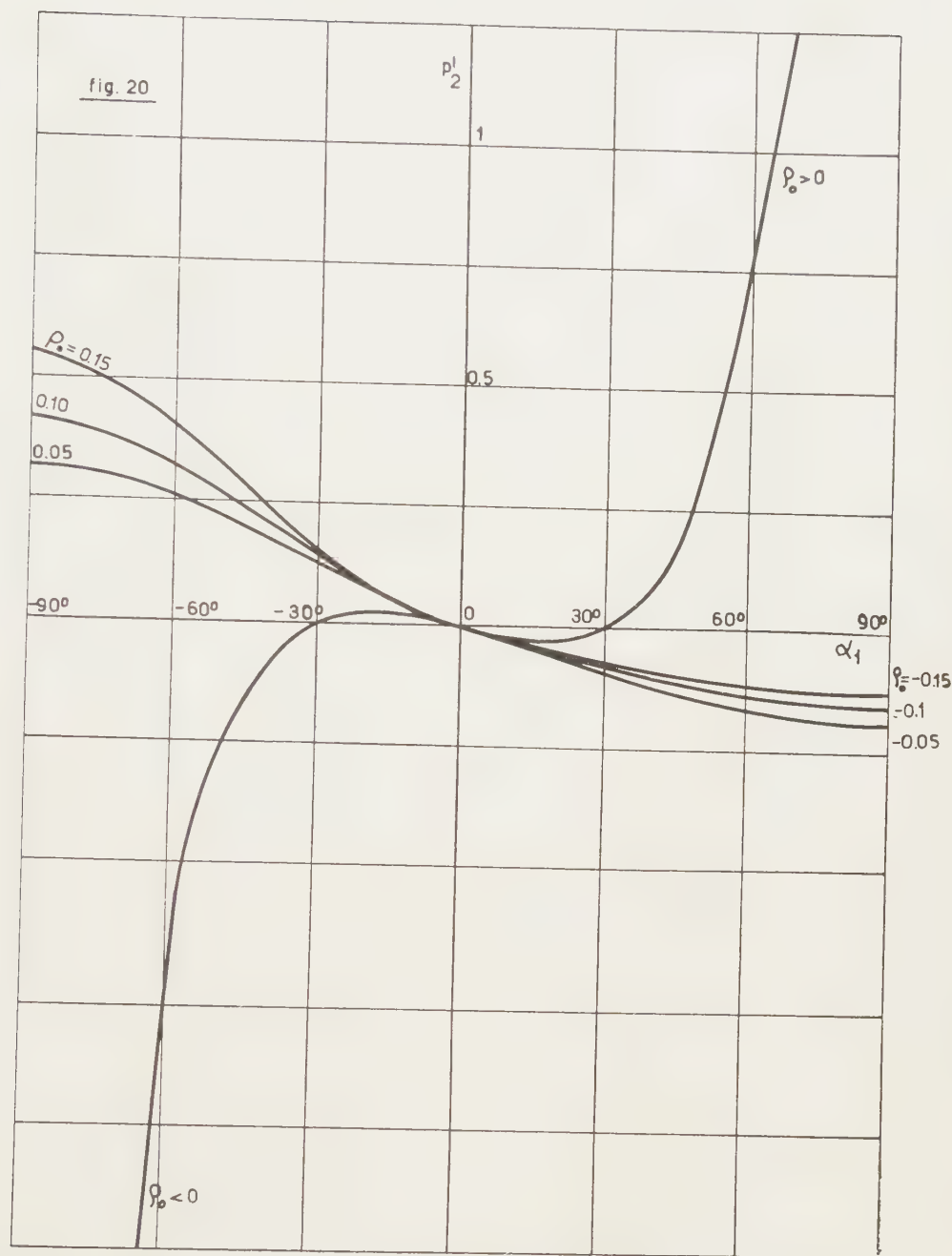


FIG. 20.

RALDO DI FRANCIA for valuable advice during the course of the present research. Thanks are due also to

Dr A. M. VERGA SCHEGGI for her help in many lengthy calculations.

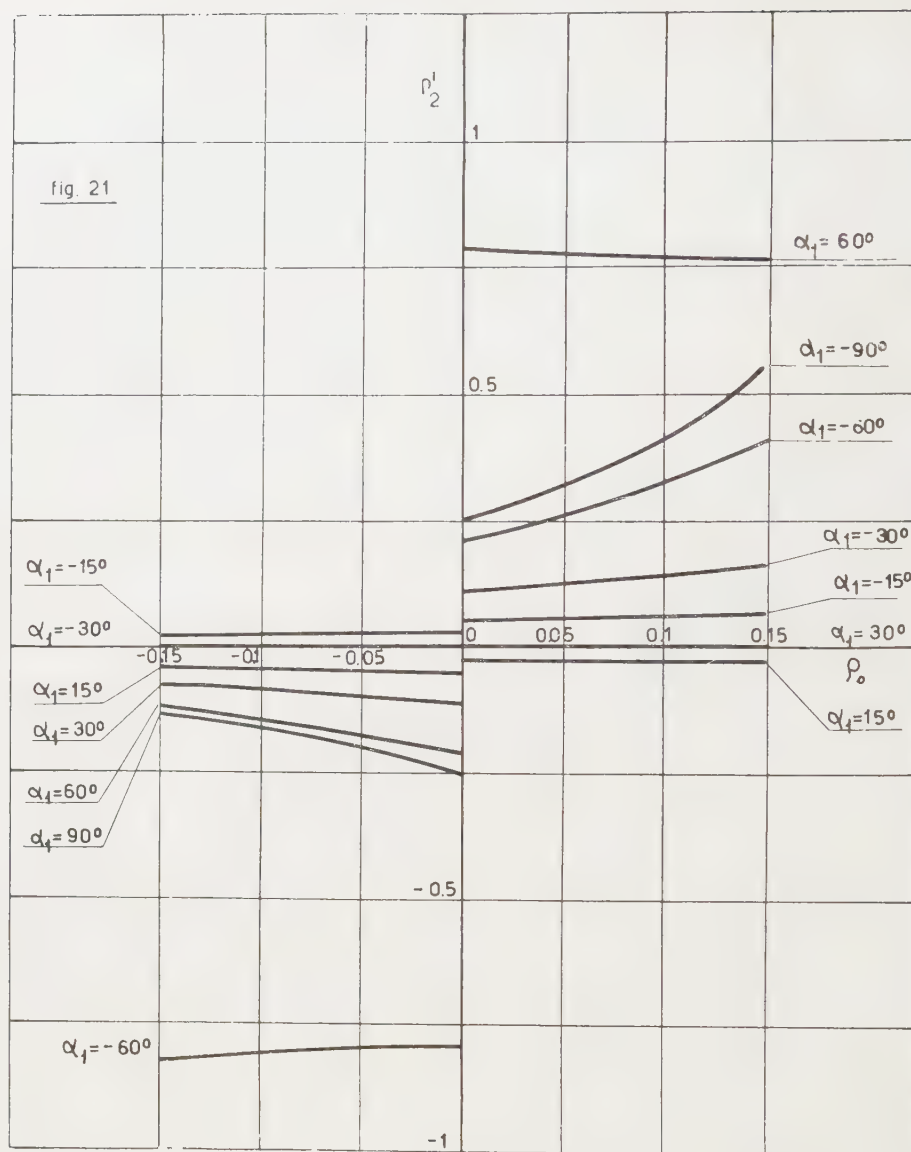


FIG. 21.

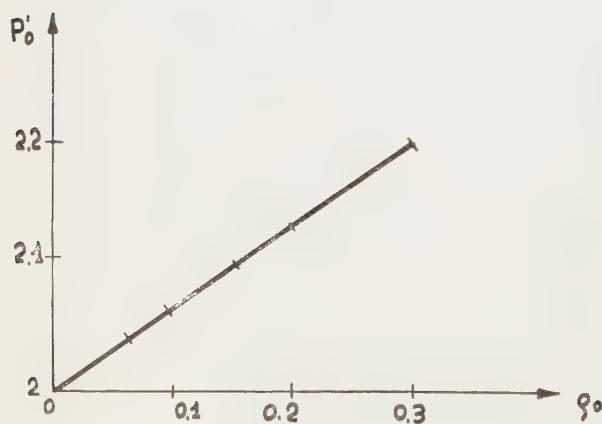


FIG. 22.

REFERENCES

- [1] J. BROWN. *Microwave lenses* (London, 1953), p. 101.
- [2] G. TORALDO DI FRANCIA, *Opt. Acta*, **1**, n° 4, fév. 1955, p. 157.
- [3] H. B. DE VORE, HARLEY IAMS. *R. C. A. Review*, **9**, 1948, 721.
- [4] R. F. RINEHART. *Journ. Appl. Phys.*, **19**, 1948, 860.
- [5] S. B. MYERS. *Journ. Appl. Phys.*, **18**, 1947, 221.
- [6] G. TORALDO DI FRANCIA. *Proc. of the Florence Meeting on Problems in Contemporary Optics* (Firenze, September, 1954), in the press.
- [7] G. TORALDO DI FRANCIA. *J. Opt. Soc. Am.*, in the press.

Manuscrit reçu le 1^{er} février 1955.

L'œil humain devant le spectacle de télévision

G. A. BOUTRY

SOMMAIRE. — L'article est consacré à l'étude des réactions d'observateurs normaux examinant des spectacles de télévision dans des conditions qui se rapprochent de celles qui prévalent à domicile. La plus grande partie du travail concerne le cas des spectacles de télévision en couleurs et l'on décrit des expériences destinées à permettre de déterminer le degré de pollution colorée et de diaphotie acceptables ; la variation de la limite de séparation visuelle avec la couleur, la visibilité du papillotage et de la structure animée de l'image, sont aussi étudiées.

ZUSAMMENFASSUNG. — Die Arbeit untersucht das Verhalten des normalen Beobachters bei der Betrachtung eines Fernsehbildes unter Verhältnissen, die denen beim Heimempfang ähnlich sind. Eine besondere Beachtung wird dem Farbfernsehen geschenkt und es werden Versuche beschrieben, durch die eine Abschätzung der Farbverfälschung und « diaphoty » möglich wird. Ferner wird die Änderung des Auflösungsvermögens des Auges mit der Farbe, die Sichtbarkeit des Flimmerns und der Bewegungsstruktur bei der Überlagerung über das Hauptbild untersucht.

SUMMARY. — The paper is devoted to an examination of the behaviour of the normal human observer when examining a television display under conditions approximating those of home entertainment. Special attention is given to the case of colour television and experiments are described by the aid of which it has been found possible to estimate the amount of colour pollution and "diaphotie" permissible ; the variation of the resolving power of the eye with colour, the visibility of flicker and of moving structures superimposed on the significant image are also investigated.

I

Le présent rapport résume des recherches expérimentales faites dans notre Laboratoire au cours des années 1950-1953. De nombreux mémoires publiés à l'étranger pour décrire des procédés de télévision en couleurs paraissent trouver leur point de départ dans des propositions relatives au comportement de l'œil humain, propositions qu'il n'est pas toujours possible de retrouver ou d'établir à partir des travaux publiés d'Optique Physiologique. Dans la plupart de ces travaux les conditions expérimentales adoptées ne sont pas celles qui prévalent dans l'examen d'un spectacle de télévision. D'autre part des limitations inhérentes à ce nouveau moyen de transport de l'information, le principe même de la restitution du spectacle, posent au sujet des réactions de l'œil humain certaines questions qui se présentent à l'opticien d'une façon inhabituelle.

On voudra bien comprendre que les recherches ainsi entreprises n'ont pas la prétention d'avoir épuisé un vaste sujet, ni celle de l'avoir traité d'une manière vraiment scientifique. Le temps, les ressources en hommes et en argent, des conditions de rentabilité qu'on ne saurait perdre de vue dans l'étude d'un sujet qui ressortit à l'art de l'ingénieur, ont imposé des limites bien définies. On les a précisées dans cet exposé partout où cela était nécessaire. Au début des travaux, on avait le sentiment que les recherches antérieurement faites par de nombreux auteurs sur le comportement de l'œil examinant un spectacle monochrome de cinématographie ou de télévision, avaient suffisamment précisé les phénomènes pour qu'il soit inutile d'y revenir : on en a adopté les conclusions, qui sont rappelées brièvement dans la suite ; il a fallu pourtant les compléter dans quelques endroits : c'est ce que nous

avons fait pour l'étude de la *diaphotie*. Dans l'étude de la pollution des spectacles colorés nous avons fait de larges emprunts aux travaux de M. MAC ADAM et de ses collaborateurs, ce que nous avons signalé dans le texte.

L'exposé actuel ne prétend être qu'un résumé. Les dispositifs expérimentaux employés y sont décrits avec une extrême brièveté, quelquefois même réduits à leur principe. Des ensembles de résultats obtenus, on n'a retenu que l'essentiel : en agissant autrement, on aurait été amené à établir un texte diffus et peu lisible. Des mémoires exposant séparément d'une façon plus complète chacun des sujets ayant fait l'objet de travaux expérimentaux dans le cadre de cet ensemble sont en cours de préparation ou de publication. On en trouvera la liste à la fin du présent exposé. Enfin, pour rendre l'exposé aisément compréhensible à la fois au physicien et à l'ingénieur, on a partout évité de faire appel à un vocabulaire colorimétrique ou radioélectrique trop spécialisé.

II

Dans tout ce qui va suivre, on considère seulement un *spectacle* coloré restitué sur un écran par synthèse trichrome additive. Trois matières luminescentes convenablement choisies et dont l'émission est modifiée par des filtres adéquats fournissent les composantes primaires R_0 , V_0 , B_0 de ces images. (Dans certaines expériences, ces composantes étaient obtenues à partir de lumière blanche filtrée de façon à restituer trois primaires très voisines de R_0 , V_0 , B_0). Dans tous les exemples numériques cités, dans toutes les expériences décrites, les trois primaires utilisées étaient définies par les données figurant au Tableau I.

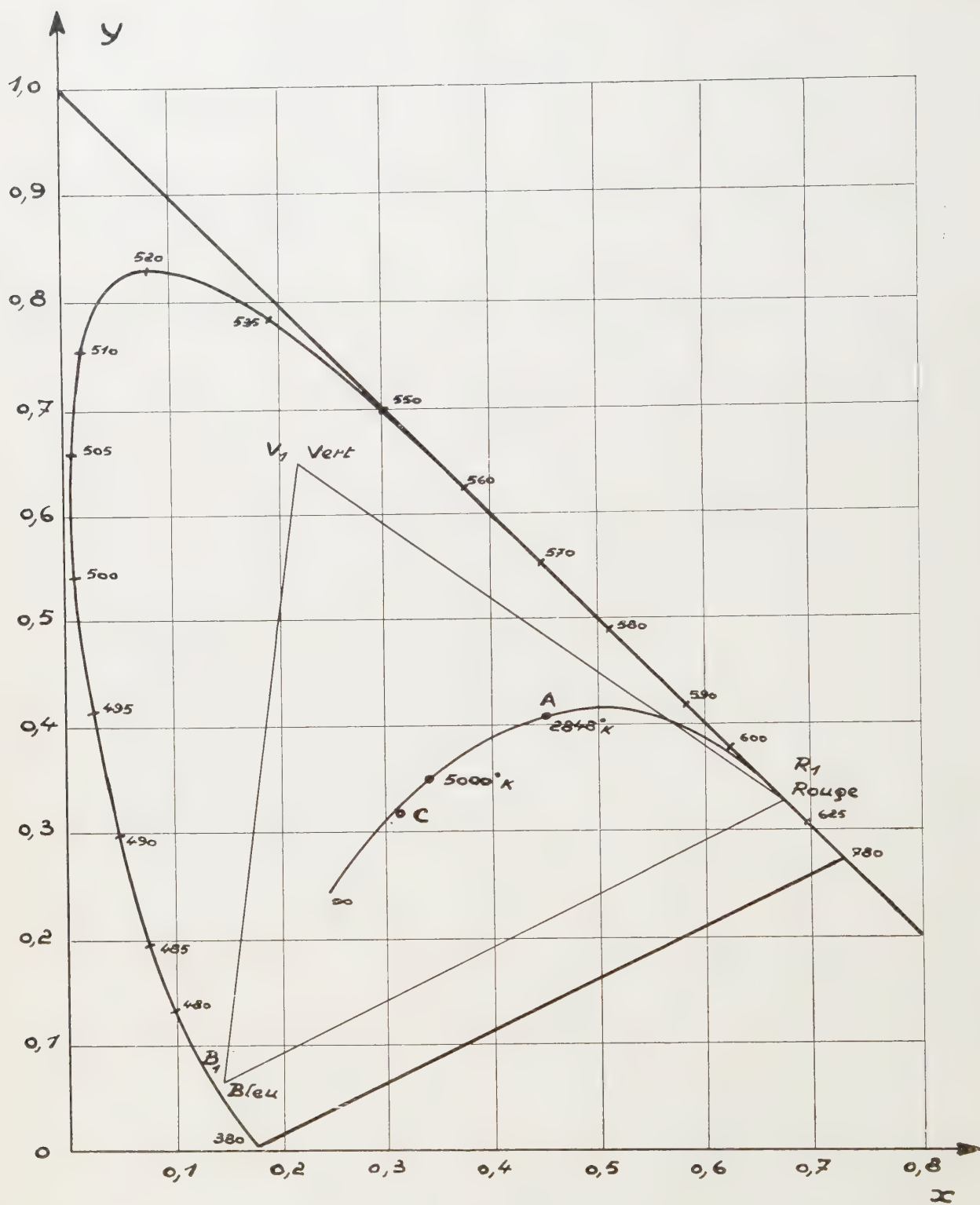


FIG. 1.

TABLEAU I. — Primaires utilisées

	V_0 vert	R_0 rouge	B_0 bleu
Longueur d'onde dominante λ_D microns	0,532	0,613	0,467
Pureté d'excitation (par rapport au Blanc C).....	69 %	100 %	95 %
Coordonnées colorimétriques (C. I. E.) x	0,217	0,676	0,142
y	0,644	0,324	0,061

La figure 1 montre la position des primaires en question sur le diagramme colorimétrique (coordonnées x et y de la C. I. E.). L'examen de cette figure et du tableau permet de constater immédiatement que la primaire rouge utilisée se trouve être un point du *spectrum locus* et que la primaire bleue est également très près d'être saturée. Par contre, la primaire verte est largement lavée de blanc.

On remarquera ici que le choix des primaires était essentiellement déterminé par les propriétés des matières luminescentes utilisables dans la construction des oscillographes cathodiques : ces matières sont peu nombreuses actuellement. Aussi n'est-on pas surpris de constater que les primaires indiquées ci-dessus diffèrent dans l'ensemble assez peu de celles avec lesquelles divers auteurs américains paraissent avoir travaillé et dont on trouve la spécification dans un mémoire de M. WINTRINGHAM [1] et que le tableau II reproduit :

TABLEAU II. — Primaires recommandées pour la restitution par M. WINTRINGHAM (Primaires RMA, 1946)

	Vert	Rouge	Bleu
Longueur d'onde dominante λ_D (microns)	0,541	0,613	0,461
Pureté par rapport au blanc « C »	86 %	~ 100 %	~ 95 %
Coordonnées C. I. E. x	0,2500	0,6805	0,1477
y	0,6885	0,3193	0,0412

La figure 2, en partie empruntée au mémoire déjà cité reproduit sur le diagramme de la C. I. E. les deux triangles dont les sommets sont formés respectivement par les deux groupes de primaires décrites par les tableaux I et II. On y a fait figurer, en même temps, la zone (limitée par un trait continu épais sur la figure) qui, d'après M. WINTRINGHAM, forme le lieu de toutes les teintes industrielles (pigments, étoffes, peintures) qu'on peut se procurer aux U. S. A.

Toutes les teintes dont les coordonnées colorimétriques représentent des points situés à l'intérieur du triangle dont les sommets sont formés par les coordonnées des primaires utilisées peuvent être repro-

duites correctement par des oscillographes utilisant ces primaires, ce qui ne veut pas dire que cela sera toujours le cas : cela dépendra des propriétés de l'appareillage de prises de vues et de l'ensemble des circuits qui se succèdent entre cette caméra et les oscillographes de reproduction. Sur ce sujet, qui ne rentre pas dans le cadre du présent exposé, on pourra consulter, entre autres, le mémoire de WINTRINGHAM déjà cité.

Luminance maximale du blanc. — *Tout ce qui suit suppose qu'on ne télévisé pas d'objets lumineux par eux-mêmes.* Le spectacle à reproduire se compose uniquement de diffuseurs plus ou moins sélectifs, plus ou moins parfaits. Cela posé, plaçons devant l'appareil de prises de vues un diffuseur blanc parfait recevant l'éclairement maximal disponible. Régions l'appareillage de façon que la chromaticité de la reproduction soit correcte. Soit L_0 la luminance de l'écran reproducteur à ce moment : cette luminance est la *luminance maximale* de la reproduction qui ne pourra être dépassée à aucun moment du spectacle.

Quelle est la valeur de cette luminance dans un spectacle reproduit actuellement par télévision monochrome ? Bien que, dans des cas rares, elle puisse atteindre 100 nits, les valeurs qu'on trouve le plus fréquemment réalisées sur l'écran des appareils en service chez des particuliers se situent à peu près toujours entre 20 et 35 nits. Si l'on en croit P. C. GOLDMARK (1) la luminance d'un écran de projection cinématographique dans le cas d'un spectacle monochrome fourni par un film de 16 mm serait de l'ordre de 27 nits ; cette valeur tomberait aux environs de 13 nits dans le cas d'un film en couleurs.

On entend souvent reprocher au cinéma en couleurs la luminance un peu faible de ses images ; par contre, les luminances réalisées sur les écrans de télévision d'aujourd'hui sont, de l'avis général, suffisantes. En fixant dans ce qui va suivre à 30 nits la luminance maximale du spectacle de télévision en couleurs on a donc l'assurance d'obtenir l'assentiment du spectateur habitué aux résultats qu'il obtient aujourd'hui.

C'est avec cette valeur de la luminance maximale qu'on a opéré dans toute la suite de ces recherches.

Luminances maximales des primaires. — Cela posé, si l'on veut déterminer les luminances des primaires dont la somme reproduit la luminance maximale de l'écran, il convient de spécifier la distribution spectrale de l'énergie dans le spectre de la ou des sources qui éclairent le spectacle. Dans l'exemple qu'on va prendre, il s'agira de la lumière des lampes à incandescence à filament de tungstène fonctionnant à la température de couleur de 2848°K (blanc « A » de la C. I. E.) Un calcul colorimétrique classique fournit immédiatement les valeurs des luminances primaires cherchées (tableau III).

(1) Cité par G. E. ANNER. — Elements of Television Systems (page 28). Prentice Hall, New York, 1951.

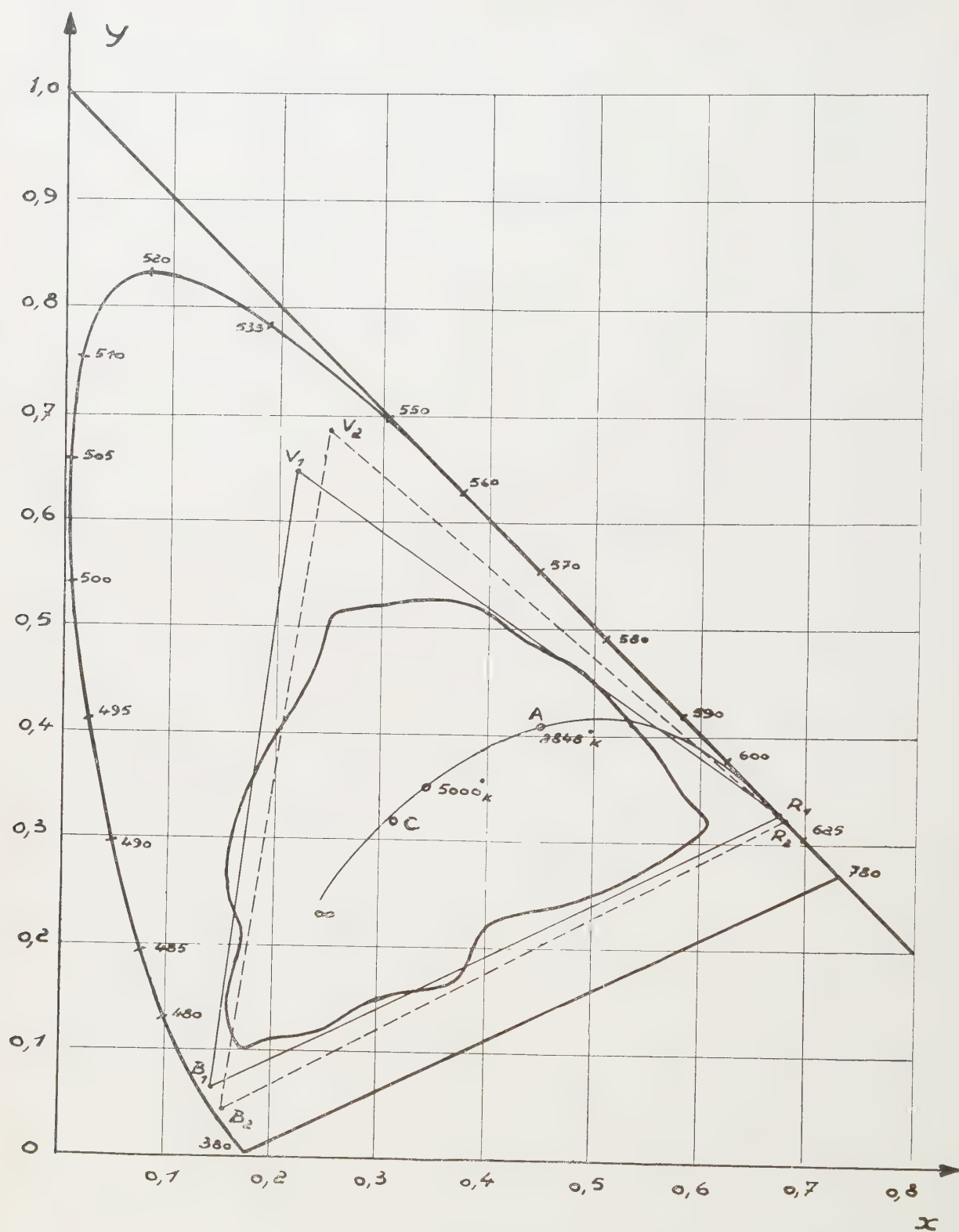


FIG. 2.

TABEAU III. — Source : blanc « A » de la C. I. E.

Luminance maximale blanche : 30 nits = L_A	V_0	R_0	B_0
Valeur des luminan- ces primaires	17 nits	12,44 nits	0,53 nit
Valeur des luminan- ces relatives : $\frac{L_x}{L_A}$	56,7 %	41,5 %	1,8 %

On voit que les luminances maximales des primaires verte et rouge sont du même ordre de grandeur (rapport 1,4/1) ; celle de la primaire bleue est 30 fois plus petite.

Luminance maximale d'une teinte quelconque. — Ce réglage fait, toute région colorée du spectacle apparaîtra sur l'écran avec une luminance dont la valeur maximale, toujours inférieure à L_A , sera fonction des coordonnées colorimétriques x et y de chaque teinte reproduite. La figure 3 représente la surface des luminances maximales (en valeurs relatives) dans le cas où le réglage est fait de façon à donner au blanc 2 848°K la luminance maximale. On remarque, en examinant cette figure que l'aire occupée à l'intérieur du triangle $V_0 R_0 B_0$ par les teintes qui pourront atteindre une luminance égale à la moitié de la luminance maximale du blanc va des orangés aux verts purs, en occupant tout au plus le tiers de l'étendue totale de ce triangle. Cela n'est pas un défaut de la reproduction : le fait existe dans le spectacle réel à reproduire. En s'exprimant très grossièrement, on peut dire que la luminance qu'une teinte peut atteindre dans le spectacle est d'autant plus faible que les coordonnées colorimétriques de cette teinte sont simultanément plus voisines de 0. Il n'y a rien dans tout ceci qui soit particulier à la télévision.

Nous avons choisi, dans ce qui précède, l'exemple d'un spectacle éclairé par des sources dont la couleur correspond à celle de l'étalon « A », le moins riche en bleu des trois étalons de la C. I. E. parce que, pour de nombreuses raisons techniques il est permis de penser que, lors des débuts, les spectacles de télévision en couleurs seront souvent transmis de studios ou de théâtres munis principalement d'un éclairage naturel de ce genre (fig. 4). Un calcul analogue, exécuté pour un réglage donnant la luminance maximale blanche de 30 nits au blanc correspondant à une température de couleur de 5 000°K fournit les valeurs suivantes des luminances maximales des primaires :

$L_{V_0} = 19,2$ nits, $L_{R_0} = 9,15$ nits, $L_{B_0} = 1,65$ nits.

On voit que le rapport $\frac{L_{V_0}}{L_{B_0}}$ est encore supérieur à 10 (11,65 environ) alors que $\frac{L_{V_0}}{L_{R_0}}$ ne dépasse guère l'ordre

de 2. Dans tous les spectacles de télévision en couleurs, la luminance maximale de la primaire bleue choisie reste petite devant les deux autres.

Cette conclusion, qui joue un rôle important dans la suite des travaux résumés n'est correcte que pour un choix convenable des coordonnées colorimétriques des primaires, notamment de la primaire bleue. Le tableau IV résume ce qui se passe dans le cas des primaires que M. P. C. GOLDMARK et al. [2] avait délibérément choisies, dans l'étude du système de télévision en couleurs C. B. S., de façon à donner à la primaire bleue une luminance maximale importante.

TABEAU IV. — Primaires préconisées en 1951 par MM. P. C. GOLDMARK et al.

	Vert	Rouge	Bleu
Longueur d'onde dominante λ_D (microns)	0,537	0,613	0,479
Pureté	83 %	100 %	88 %
Coordonnées C. I. E. x y	0,227 0,694	0,674 0,326	0,122 0,142
Luminance maximale de l'écran $L_C = 30$ nits (blanc C)	17,65 nits	7,40 nits [4,95 nits
Valeur des luminan- ces primaires.			
Valeur des luminan- ces relatives L_x/L_C .	~ 59 %	~ 24,7 %	~ 16,5 %

III

Le « bruit de fond » dans le spectacle monochrome. — On rappellera ici que, dans la pratique de l'exploitation des réseaux de télévision aux Etats-Unis et en France, on considère comme non pollué pour l'observateur un spectacle dont la reproduction est assurée par un signal entaché d'un « bruit de fond » d'origine thermique situé à 30 décibels au-dessous du niveau maximal de ce signal. En Angleterre, on peut déduire d'un mémoire de M. FAULKNER [3] des tolérances du même ordre.

Il convient ici de traduire en termes photométriques une définition faite en un vocabulaire radio-électrique de caractère fortement conventionnel. Le « bruit de fond » présent dans le signal est ici défini (en volts) comme égal à 7 fois la valeur de la moyenne quadratique de la tension de bruit $\sqrt{\Delta v}$, pendant que le niveau maximal du signal est mesuré, en volts, par l'amplitude v qui sépare le niveau correspondant à la luminance maximale de l'écran du niveau correspondant au noir (blanking). Le « rapport signal/bruit de fond exprimé en décibels », r , est alors exprimé par

(1) $r = 20 \log \frac{7 \cdot \sqrt{\Delta v}}{v}$

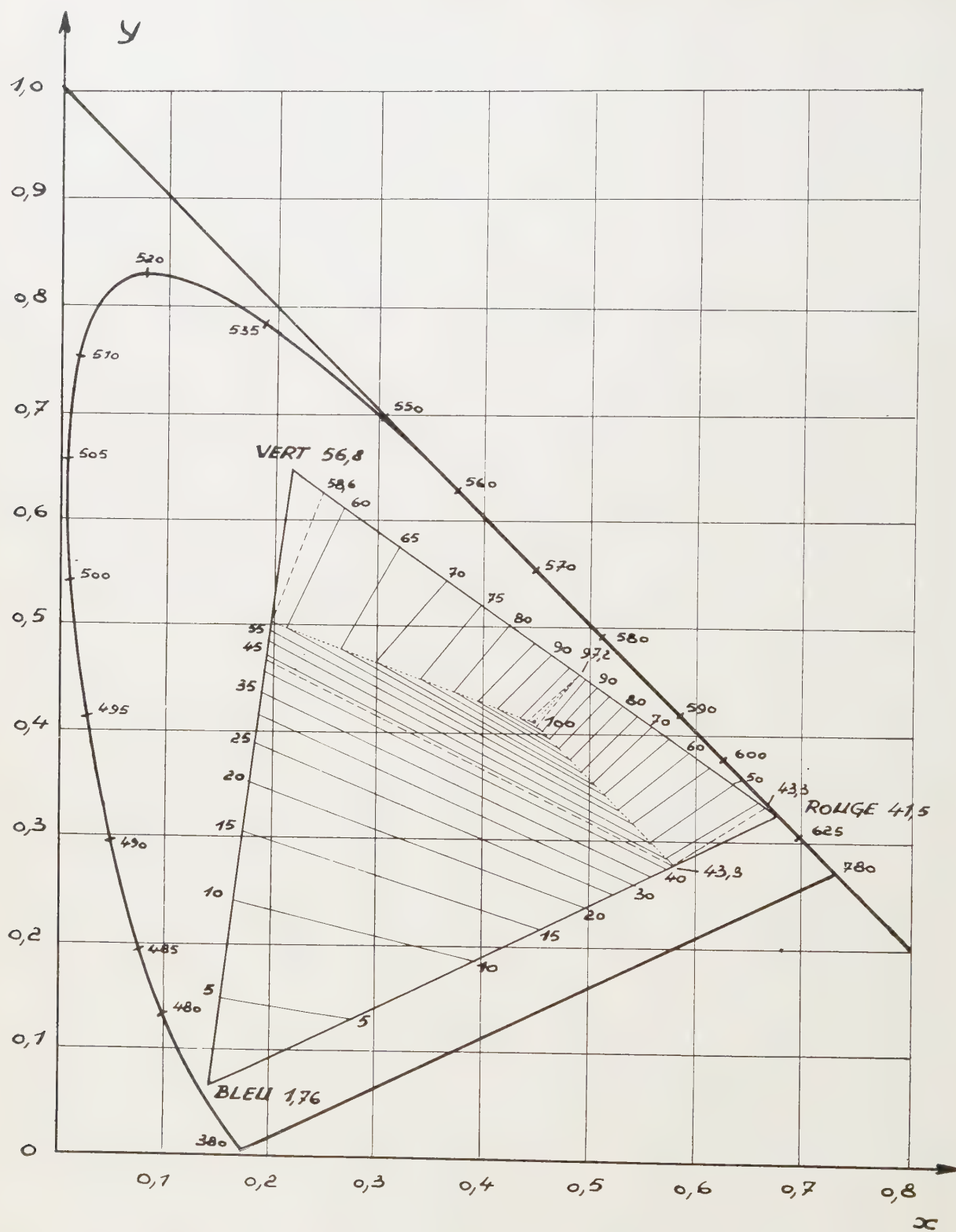
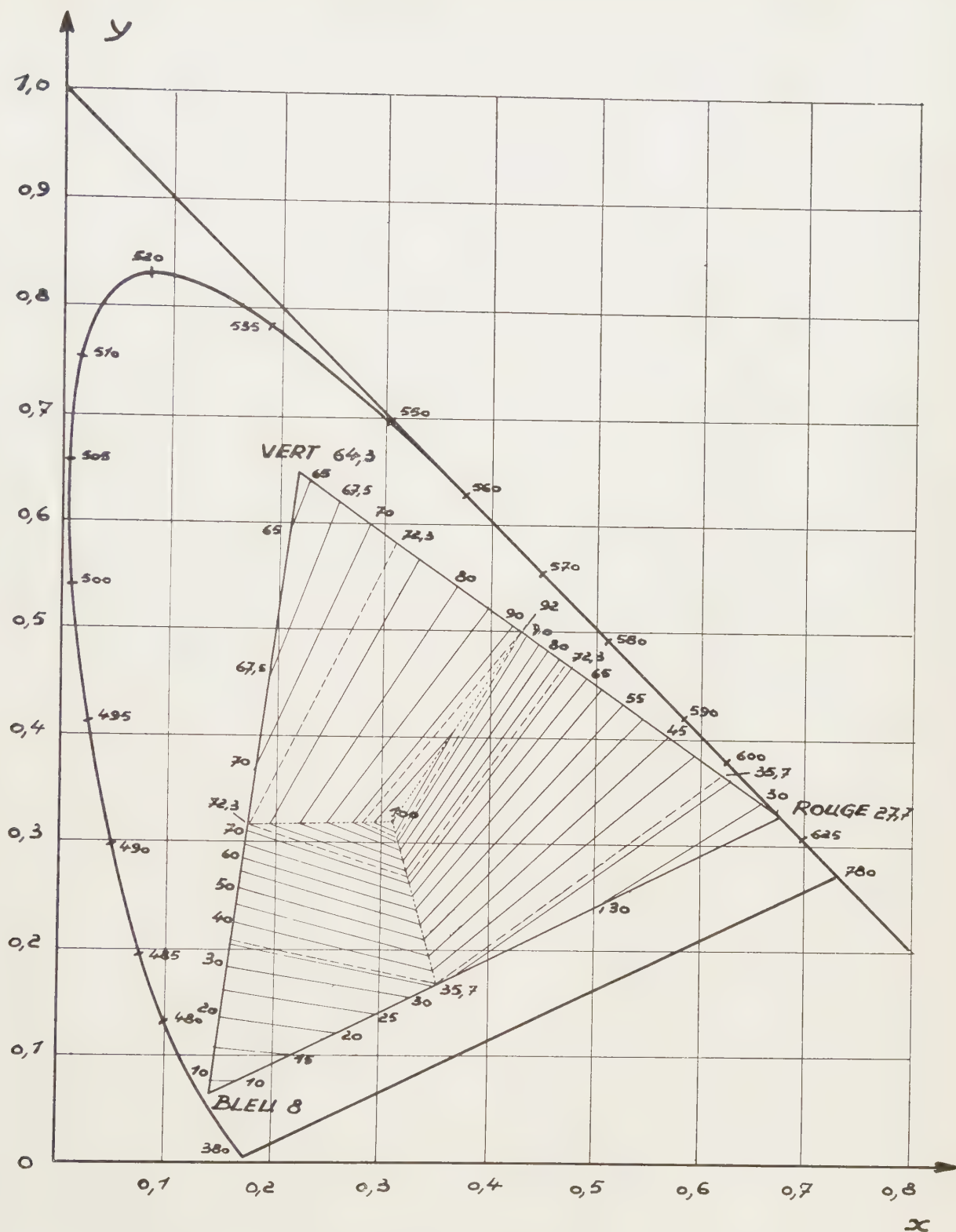


FIG. 3. — Surface des luminances maximales relative au Blanc A ($L_A = 100$).

FIG. 4. — Surface des luminances maximales relative au Blanc C ($L_c = 100$).

équation qui donne, si on pose $r = 30$,

$$(2) \quad \frac{\Delta \varphi}{\varphi} = \frac{1}{221} \text{ environ } \simeq 4,5/1\,000.$$

Admettons que la luminance d'un point de l'écran est proportionnelle à l'amplitude du signal à l'instant considéré; on sait en photométrie que, *pourvu qu'on dispose d'une plage de luminance fixe pour la comparaison*, des variations ou des fluctuations à très basse fréquence de la luminance d'environ 3/1 000 sont discernables quand l'œil est placé dans les conditions de sensibilité les meilleures possibles.

Lorsque la relation (2) est satisfaite, et en tenant compte des conditions où le spectateur est habituellement placé, celui-ci ne discernera pas la perte de contraste due au voile de fond provoqué par le bruit, ce qui ne l'empêchera pas de percevoir des fluctuations de luminance locale 7 fois plus fortes — soit de l'ordre de 3 % — quand de telles impulsions sont assez rapides pour se traduire par un point ou une traînée superposée au spectacle: la sensibilité de l'observateur à la pollution du spectacle par un « bruit » d'origine thermique provient donc du fait que ce « bruit » introduit dans l'image une structure, une granulation visible et mouvante.

Quelques expériences grossières nous ont montré que les observateurs, qui la discernaient très bien, restaient indifférents dans une large mesure à la pollution d'un spectacle monochrome par un voile de fond continu, tant que ce voile n'atteint pas une intensité de nature à diminuer le pouvoir séparateur de l'œil dans les conditions d'examen où il est placé (baisse du contraste maximum de 1 à 0,85 facilement toléré par tous). En fait, l'introduction ou la suppression d'un voile de l'image par déplacement de la tension de polarisation de l'électrode de contrôle de l'oscillographe est un moyen dont le spectateur dispose pour faire varier le contraste du spectacle qu'il examine: il en use d'ordinaire pour augmenter ce contraste.

Par analogie avec le vocable « diaphonie » utilisé dans les publications relatives à la téléphonie, on nommera « diaphotie » la pollution d'une image par une autre image qu'on lui superpose. On résumera ici les résultats essentiels qu'on a obtenus dans des expériences purement optiques.

a) *Diaphotie tolérable dans le cas d'images fixes.* — On projetait sur un écran à l'aide d'une lanterne une image fixe; les blancs purs atteignaient la luminance de 30 nits = L_0 . On superposait à cette image une autre image projetée, sans en prévenir les spectateurs. Ceux-ci étaient toujours des visiteurs occasionnels qui se prêtaient bénévolement à des expériences d'une durée de quelques minutes (une trentaine de personnes). Voici les opinions qu'ils ont exprimées:

Luminance maximale des blancs de l'image parasite:

$l_0 = \frac{L_0}{100}$ (40 db) aucun observateur ne décèle l'apparition ou la disparition de la pollution.

$l_0 = \frac{L_0}{30}$ (∞ 30 db): quelques observateurs, pourvu qu'on répète l'expérience, parvenaient à signaler l'apparition de la pollution sans pouvoir la décrire.

$l_0 = \frac{L_0}{20}$ (∞ 25 db): tous les observateurs, après quelques expériences, signalent régulièrement l'apparition d'un voile de fond.

$l_0 = \frac{L_0}{10}$ (∞ 20 db): la très grande majorité des observateurs commencent à discerner *dans les noirs de l'image principale* la structure de l'image parasite... *Aucun observateur ne perçoit d'altération dans les blancs.*

Le fait essentiel à retenir ici est que la tolérance d'un spectateur non averti, considérable dans les noirs de l'image est si large dans les régions de luminance maximale que nous n'avons pas cherché à en déterminer la limite.

b) *Diaphotie tolérable dans le cas d'images animées.* — On projetait sur un écran deux films monochromes du format de 16 mm. La luminance maximale L_0 dans le cas du premier (image principale) était de 30 nits. Les observateurs étaient consultés comme on l'indiquait ci-dessus. Voici les opinions exprimées:

$l_0 = \frac{L_0}{100}$ (40 db): pour tous les observateurs, pollution visible dans les noirs purs, peu gênante.

$l_0 = \frac{L_0}{30}$ (30 db): pour tous les observateurs, pollution très visible et gênante dans les noirs.

$l_0 = \frac{L_0}{20}$ (25 db): pour tous les observateurs, la pollution envahit les demi-teintes.

$l_0 = \frac{L_0}{10}$ (20 db): la pollution n'est indiscernable que dans les régions de luminance maximale de l'image principale.

Malgré la forme vague qu'on est contraint d'employer pour les expériences, les résultats sont instructifs; ils montrent bien le rôle joué ici par l'attention: le mouvement de la structure ou de l'image polluante attire l'attention sur un contraste ou une variation de luminance qui, depuis longtemps perceptibles, n'avaient pas encore été perçus.

Nous avons voulu compléter ces essais par quelques mesures faites par des observateurs entraînés et avertis, dans des conditions plus sévères. Cette fois, la luminance maximale du spectacle pollué variait. Dans une première série de mesures, ce spectacle ne se composait que de l'écran uniformément éclairé. On déterminait, en formant sur lui l'image d'un quadrillage noir et blanc mobile, la luminance polluante juste visible. Dans une seconde série le même qua-

drillage était projeté sur un spectacle formé de grandes plages très contrastées (photographie monochrome d'un tableau de Henri Matisse : La Conversation) : on examinait seulement les plages correspondant à la luminance la plus élevée et l'on déterminait le moment où la luminance polluante gênait l'observateur, dont l'œil commençait à suivre le quadrillage dans son mouvement à travers le spectacle fixe.

Voici les résultats moyens donnés par 4 observateurs :

1^{re} série : Structure mobile de contraste 1 sur champ uniformément éclairé : seuil de visibilité

Luminance du champ L_0 , nits .	30	3,2	0,32	10^{-4}
Luminance parasite l_0 , nits.....	$165 \cdot 10^{-3}$	$21,5 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$0,9 \cdot 10^{-3}$
Rapport l_0/L_0 ...	0,55 %	0,67 %	1,12 %	—
r , décibels	45,2	43,5	39,0	—

2^e série : Spectacle varié pollué par une structure mobile de contraste 1

Critère	discernable	génant	discernable	génant	discernable	génant
Luminance de la région observée L_0 , nits	31	31	3,2	3,2	0,27	0,27
Luminance parasite l_0 , nits ...	0,385	0,960	0,036 ₃	0,142	0,0065	0,022 ₈
Rapport l_0/L_0 ..	1,23%	3,1 %	1,13%	4,4 %	2,4 %	8,4 %
r , décibels	38,2	30,2	38,9	27,1	32,4	21,5

On voit que, dans l'étendue du domaine de la vision diurne étudié, le taux de diaphotie juste visible ne varie que lentement ; il paraît croître plus rapidement dans le domaine de la vision crépusculaire. Le taux de diaphotie gênante dans l'examen du spectacle était, dans le domaine étudié, trois ou quatre fois supérieur au taux juste discernable. Ce dernier était toujours plus grand dans le cas d'un spectacle varié que dans celui où l'on examinait un écran uniforme : c'est une mesure de l'attention. La reproductibilité de la plupart de ces déterminations n'est guère assurée à mieux que 15 %, pour un observateur déterminé.

Pollution du spectacle en couleurs. — Par souci de simplicité, on supposera que les courbes de réponse de l'appareil reproducteur soient, pour les primaires, des droites passant par l'origine (fig. 5). Soit OM l'une de celles-ci. Elle est limitée au point M de coordonnées S_0 , L_0 , correspondant à la reproduction du blanc choisi dans le réglage décrit précédemment. Ce réglage effectué, supposons qu'on l'altère, d'une façon qui équivaut, sur la figure 5, à une faible translation positive ou négative, \overline{OA} ou \overline{OB} de l'origine des abscisses : tout se passe désormais comme si on avait ajouté ou

retranché à la valeur des luminances correspondant à chaque signal une quantité constante représentée par les segments $\overline{AK} = \overline{BL}$. Dans ces conditions, toutes les teintes reproduites subissent un virage coloré par rapport à la reproduction qu'on aurait obtenue si on

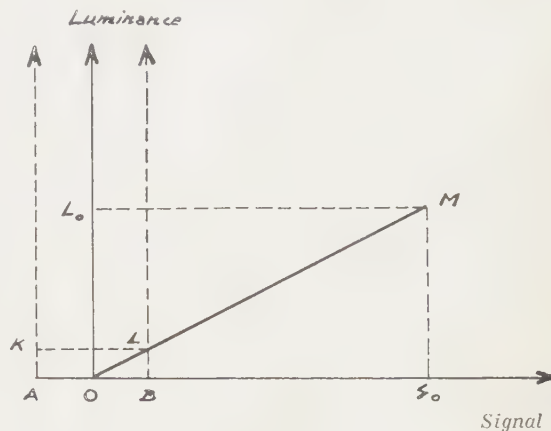


FIG. 5.

n'avait pas dérangé le réglage : il y a pollution ; la présence d'un bruit de fond équivalant à un voile discernable sur l'une des images primaires est un cas particulier du phénomène.

Au sujet des réactions de l'observateur examinant ces pollutions colorées, on peut se poser de nombreuses questions. Beaucoup d'entre elles, comme l'exploitation du cinéma en couleurs l'a montré, ont un intérêt psychologique et commercial considérable, sans être pour cela faciles à étudier scientifiquement. A condition qu'il possède un moyen de comparaison, plage ou objet témoin, l'œil humain est fort sensible à la pollution du spectacle introduite par un excès ou un défaut systématique de l'une des primaires dans la reproduction. Il est au contraire extrêmement tolérant d'un tel virage général si les moyens de comparaison lui manquent ; mieux, on peut soutenir que, dans certains cas il réclame un tel virage ; ce besoin paraît se manifester chaque fois que la luminance de la reproduction est d'un ordre de grandeur très différent de la luminance du spectacle à reproduire.

L'exemple bien connu des mises en scène de théâtre où un éclairage bleu saturé, abondant, réalise une « ambiance » de clair de lune — alors que la reproduction fidèle de ce dernier, qui ferait appel à un éclairage de dominante jaune plusieurs centaines de fois moindre, ne serait acceptée par personne — est un cas particulier dans l'exploitation duquel on fait intervenir le phénomène de PURKINJE. On sait moins couramment qu'au théâtre encore, quand on cherche à donner l'illusion d'une journée méditerranéenne de plein soleil (100.000 lux, température de couleur voisine de 5 400°K), avec des éclairages qu'on doit tenir au-dessous de 3 000 lux pour ne pas gêner les acteurs, la température de couleur adoptée descend à l'ordre de 2 200 à 2 400°K : le virage coloré est énorme. Lorsque la naissance des « tubes fluorescents » a donné soudain

la possibilité de réaliser dans les intérieurs des éclairages de composition voisine de la « lumière du jour » (mais bien moins intenses), on s'aperçut que le public refusait ce qui avait d'abord paru un progrès : « l'ambiance » produite suggérait la fraîcheur d'un cellier. Toutes ces constatations, assorties de variantes suggérées par des questions de commerce et de mode sont connues et exploitées par les industries photographiques et cinématographiques. Les spécialistes de l'Optique Physiologique se sont contentés d'étudier, dans des cas bien définis, la variation de la saturation apparente d'une teinte avec sa luminance et le phénomène de BEZOLD-BRÜCKE [4].

Sans poursuivre cette voie, on doit se souvenir que divers physiciens, en particulier WRIGHT [5] et MAC ADAM [6] ont cherché, sur le triangle des couleurs, pour des conditions bien définies d'éclairages rétinien de quelles quantités on peut modifier les coordonnées colorimétriques de chaque teinte pour produire un virage juste discernable. Nous utiliserons les résultats de MAC ADAM pour déterminer, pour des teintes de colorimétrie et de luminance données, l'importance relative de la pollution produite par dérèglement de chacune des luminances primaires.

Voici les conditions dans lesquelles nous nous plaçons pour faire ce calcul : le réglage reproduit le blanc « A » à la brillance de 30 nits. Les installations actuelles de télévision monochrome fournissent au récepteur des signaux qu'on considère comme suffisamment purs quand le « niveau de voile » qui les accompagne se situe à 30 db au-dessous de l'amplitude correspondant à la luminance maximale de l'écran. Considérons la primaire verte choisie, dont la luminance est ici 17,03 nits (Cf. Tableau III). Appelons ΔV la variation de cette luminance telle que :

$$20 \log \frac{V}{\Delta V} = 30.$$

$$\text{On aura } \frac{\Delta V}{V} = 0,0316 \quad \text{et} \quad \Delta V = 0,538 \text{ nits environ.}$$

Les déterminations de MAC ADAM ont été faites avec des éclairages rétinien (200 trolands) qui correspondent à des conditions d'examen probablement peu éloignées de celles avec lesquelles on travaille dans cet exemple. Une pollution du blanc « A » par la primaire verte correspondant à un dérèglement de 3,16 % représente environ 2,8 écarts type, ce que nous pouvons considérer, avec MAC ADAM, comme inférieur ou à peine égal à un virage coloré juste discernable, dans le cas où l'observateur dispose d'une plage de référence de teinte fixe.

Cela posé, on a cherché, à partir des « ellipses de MAC ADAM », pour quelques teintes éparpillées sur notre triangle des couleurs reproductibles, quelles sont les variations du réglage de chaque primaire qui produiront un virage égal ou à peine supérieur à 3 fois le dérèglement cité ci-dessus (3 chromaticités discernables, soit 9 écarts type MAC ADAM). Les 5 premières lignes du Tableau V ont été calculées de cette façon.

Par contre il n'était pas possible d'étendre le calcul aux teintes voisines de l'extrémité bleue du triangle des couleurs parce que dans ce domaine les brillances avec lesquelles on opérait étaient assez faibles pour fournir des éclairages rétinien s'écartant beaucoup des conditions expérimentales réalisées par MAC ADAM et ses collaborateurs. Nous avons donc dû, par des expériences directes, étendre les résultats de MAC ADAM aux faibles luminances bleue et pourpre, et c'est à partir de ces résultats expérimentaux que le tableau qui va suivre a pu être complété.

Dans ce tableau chaque teinte étudiée est supposée avoir la luminance maximale compatible avec la reproduction du blanc « A » à la luminance de 30 nits. Dans une première colonne, destinée à l'opticien, on donne, en nits, la luminance du voile de fond ou du dérèglement qui crée le virage accepté (ΔR , ΔV , ΔB) et le rapport de cette luminance à la luminance maximale de la teinte polluée (r exprimé en %). Dans la seconde colonne, qui intéressera surtout l'ingénieur de télécommunications, on donne en % le rapport ρ de la luminance polluante (ΔR , ΔV , ΔB) à la luminance maximale de la même primaire dans la reproduction du blanc, et l'on traduit ce rapport en décibels (π) suivant la convention déjà utilisée. Les résultats obtenus demandent quelques commentaires :

1°) Comme on l'a déjà dit, l'amplitude du virage coloré accepté ayant été fixée de façon arbitraire (et d'ailleurs sévère) seule la comparaison des valeurs numériques inscrites au tableau, et non ces valeurs numériques isolées présentent de l'intérêt.

2°) On est d'abord frappé de constater que la primaire rouge et la primaire verte se comportent ici de façon très analogue : les luminances polluantes tolérables, les rapports r et ρ , les niveaux, sont en général du même ordre de grandeur ; alors que la primaire rouge possède une luminance maximale inférieure à celle de la primaire verte, ses exigences en matière de pollution sont dans l'ensemble au moins égales : cela provient du fait qu'une chromaticité discernable représente, comme on le sait, dans l'angle vert du triangle VRB une amplitude de translation notablement supérieure à ce qu'elle est dans l'angle rouge.

3°) La tolérance de toutes les teintes à examiner à la pollution π par le bleu est toujours grande devant la tolérance à la pollution par le rouge ou le vert : les niveaux admissibles de voile bleu sont, pour chaque teinte, de 10 à 20 db plus élevés que les niveaux correspondants des voiles rouge et vert.

4°) Ainsi qu'on pouvait s'y attendre la tolérance d'une teinte à la pollution est en général d'autant plus grande que la pollution est produite par une primaire de coordonnées colorimétriques plus proches des coordonnées de la teinte en question. D'autre part, le tableau montre que la tolérance à la pollution est la plus grande pour les teintes de luminance maximale élevée : le niveau de pollution tolérable par le vert ou le rouge varie de plus de 20 db quand on passe du blanc ou du jaune au bleu pur.

TABLEAU V

Pollution produisant un virage de 3 chromaticités discernables (9 écarts-type d'après MAC-ADAM)

Luminance maximale du spectacle réglée pour le blanc « A » et égale à 30 nits.

Pollutions exprimées : 1°) en nits (valeur de la luminance polluante admissible ΔP); 2°) en % de la luminance max. de la teinte polluée (r); 3°) en % de la luminance maximale de la primaire polluante ρ ; 4°) en décibels (convention $\pi = 20 \log \rho$)

Teinte polluée		Pollution par la primaire Rouge				Pollution par la primaire Verte				Pollution par la primaire Bleue			
Coordonnées colorimétriques	Luminance max. en nits	ΔR (nits)	r (%)	ρ (%)	π (db)	ΔV (nits)	r (%)	ρ (%)	π (db)	ΔB (nits)	r (%)	ρ (%)	π (db)
Blanc A : $x = 0,448$ $y = 0,408$	30	1,281	4,26	10,3	19,7	1,728	5,76	10,1	19,9	0,231	0,78	43,2	7,3
Jaune : $x = 0,489$ $y = 0,455$	29,49	1,047	3,54	8,4	21,5	1,434	4,87	8,43	21,5	0,154	0,522	29,2	10,7
Vert : $x = 0,217$ $y = 0,644$	17,03	0,441	2,58	3,54	29,0	—	—	—	—	0,154	0,90	29,1	10,7
Rouge : $x = 0,676$ $y = 0,324$	12,46	—	—	—	—	0,525	4,20	3,09	30,2	0,117	0,936	22,1	13,1
Bleu vert : $x = 0,179$ $y = 0,346$	5,85	0,195	3,33	1,56	36,1	1,095	19,3	6,62	23,5	0,112	1,91	21,2	13,5
Pourpre : $x = 0,376$ $y = 0,176$	2,73	0,364	13,4	2,93	30,7	0,285	10,5	1,67	35,6	0,088	3,21	1,66	15,4
Bleu : $x = 0,142$ $y = 0,061$	0,53	0,0490	9,3	0,393	48,1	0,115	21,7	0,667	43,4	—	—	—	—

Pour des raisons de caractère surtout commercial, on prétend souvent observer les spectacles de la télévision monochrome d'aujourd'hui dans des salles assez abondamment éclairées ; la luminance de l'écran, en l'absence de tout signal, peut atteindre une fraction de nit. De telles conditions d'observation, combinées avec la luminance maximale du spectacle que nous avons choisie conduiraient à des désaturations peu agréables de la gamme des bleus et des pourpres : le spectacle de télévision en couleurs devra s'observer dans une obscurité relative, comme c'est déjà le cas pour le cinéma en couleurs d'aujourd'hui.

Encore une fois, toutes ces remarques ne sont valables que dans les conditions de luminance spécifiées. Dans le cas d'images de luminances très élevées (300 nits par exemple), les exigences de l'œil, en ce qui concerne la gamme des bleus et des pourpres, deviendraient très grandes, pendant que d'autres phénomènes qui n'intervenaient pas jusqu'ici (BEZOLD-BRÜCKE, etc.) commenceraient à provoquer des désaturations et des virages dans les teintes de haute luminance.

IV

La perception des formes et des structures par l'œil qui examine un spectacle coloré dépend, d'une part, de facteurs qui caractérisent l'observateur et les conditions physiologiques où il se trouve au moment où il observe, d'autre part de paramètres qui caractérisent le spectacle observé. Des domaines du spectacle paraissent limités par des contours plus ou moins bien définis ; ces contours sont des régions de largeur angulaire variable, souvent petite, à l'intérieur de laquelle le contraste de luminance et où le contraste coloré subissent des variations rapides, en général concomitantes. La figure 6 rappelle la définition très simple du contraste de luminance monochrome qui s'exprime par

$$\gamma = \frac{L_1 - L_0}{L_1} \text{ variable de } 0 \text{ à } 1$$

où L_1 est la plus forte des deux luminances supposées constantes que sépare la région de contour. La défini-

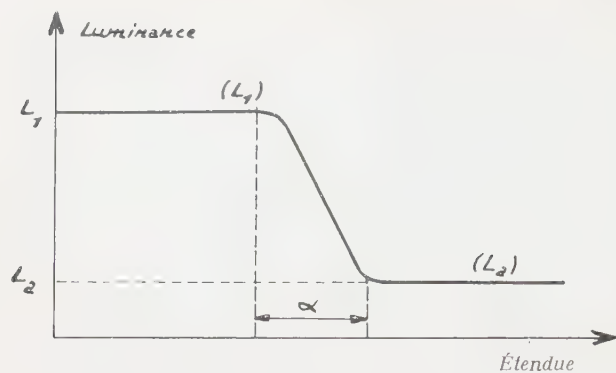


FIG. 6.

tion du « contraste coloré », fait d'expérience universelle, est moins familière, elle est en général absente des mémoires relatifs à la vision des objets colorés. Pour la formuler, supposons que le contraste de luminance est nul dans le domaine observé. Soit, sur le triangle des couleurs, A et B les points représentatifs des couleurs uniformes séparées par le contour. Exprimons le « chemin colorimétrique » \overline{AB} par le nombre minimum de chromaticités discernables qu'il faut franchir pour aller de A en B, dans les conditions de luminance constante où l'on se trouve ; soit ΔN ce nombre. Soient, sur le même diagramme, K_1 et K_2 deux teintes réelles telles que le chemin colorimétrique minimum K_1, K_2 contienne le plus grand nombre possible de chromaticités discernables (1), N_0 .

P. BILLARD a proposé d'exprimer le contraste de couleur pur par

$$\Gamma = \frac{\Delta N}{N_0}$$

fraction variable de 0 à 1 comme le contraste de luminance [7].

Dans toutes mesures de la limite de résolution de l'œil, définie à la façon classique, dans un champ monochrome, on réalise *un* ou *des* contours d'étendue angulaire donnée de chaque côté duquel la luminance

garde la même valeur. A l'intérieur de ce domaine angulaire, la luminance passe par un minimum. La figure 7 résume l'état des choses dans de telles expériences ; on détermine, pour un contraste γ donné et une valeur donnée de la luminance L_1 , la plus petite étendue angulaire α qu'on peut encore distinguer ; les résultats, dont la valeur numérique pour un observateur donné, à un moment donné, dépendent un peu de la forme des « mires » et de la loi de variation de la luminance dans le domaine α ; les ordres de grandeur ne dépendent que de γ et de L_1 ; peu variables dans le domaine des luminances et des contrastes élevés, les valeurs de α augmentent très vite quand l'un ou l'autre de ces paramètres devient faible (2).

Considérons de telles mires dans un champ monochrome dont la couleur varie. Comment varie, toutes choses égales d'ailleurs, la limite de résolution trouvée ? Nous donnerons ici les résultats qui concernent les trois primaires que nous avons utilisées. Dans les mesures, on utilisait des mires périodiques du type FOUCAULT, que les observateurs, malheureusement en très petit nombre (4 à 6), entraînés, doués d'une vision chromatique normale, sans astigmatisme résiduel important, examinaient soit dans l'obscurité, soit en présence d'un champ périphérique. Voici d'abord quelques remarques valables pour l'ensemble des résultats obtenus :

1°) La présence d'éclairage ambiant correspondant à des luminances comprises entre 0 et 0,2 nit environ ne produit aucune variation importante de l'ordre de grandeur des limites de résolution.

2°) Les limites de résolution obtenues, toutes choses égales d'ailleurs, pour la primaire rouge et pour la primaire verte, sont indépendantes de la distance de l'observateur à l'écran sur lequel on projette les mires examinées.

3°) Les mêmes limites, pour les luminances correspondant à coup sûr à la vision diurne, ne dépendent pratiquement pas du temps alloué pour chaque observation, quand ce temps est égal ou supérieur à 0,5 seconde.

4°) Ces deux dernières règles sont en défaut dans le cas de la primaire bleue. Toutes choses égales d'ailleurs, la limite de résolution trouvée avec elle est, entre 0,60 cm et 2 m (valeurs extrêmes que nous avons utilisées) fonction de la distance de l'observateur ; la myopie de l'œil normal pour l'extrémité bleue du spectre paraît la cause unique de ce phénomène. Quand les luminances bleues utilisées restent égales ou inférieures à la luminance maximale définie au titre II (0,53 nit), la limite de résolution trouvée cesse d'être indépendante du temps alloué pour chaque observation : l'examen prolongé l'améliore un peu. Cela si-

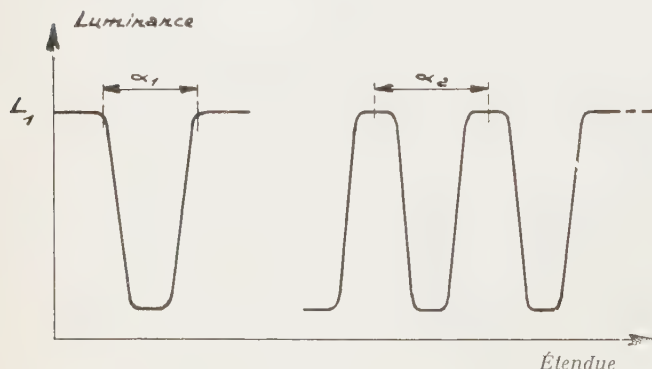


FIG. 7.

(1) Dans les conditions d'observation réalisées par MAC ADAM (loc. cit.), il s'agit du couple rouge extrême, bleu extrême situé sur le spectrum locus.

(2) Il n'est ni possible ni désirable de résumer ici des résultats aujourd'hui classiques. Le lecteur se reportera aux ouvrages spéciaux (par exemple BOUTRY, *Optique Instrumentale*, Paris, 1946) ou aux mémoires originaux parmi lesquels ceux de M. ARNULF et de ses collaborateurs de l'Institut d'Optique.

gnifie sans doute que, pour cette primaire et dans ce registre de luminance, l'observateur se trouve placé dans un domaine d'éclairements rétiens crépusculaires.

Le tableau VI et la figure 8 résument les résultats principaux de ces expériences, dans le cas de mires de contraste γ égal à l'unité (moyenne pour 4 observateurs).

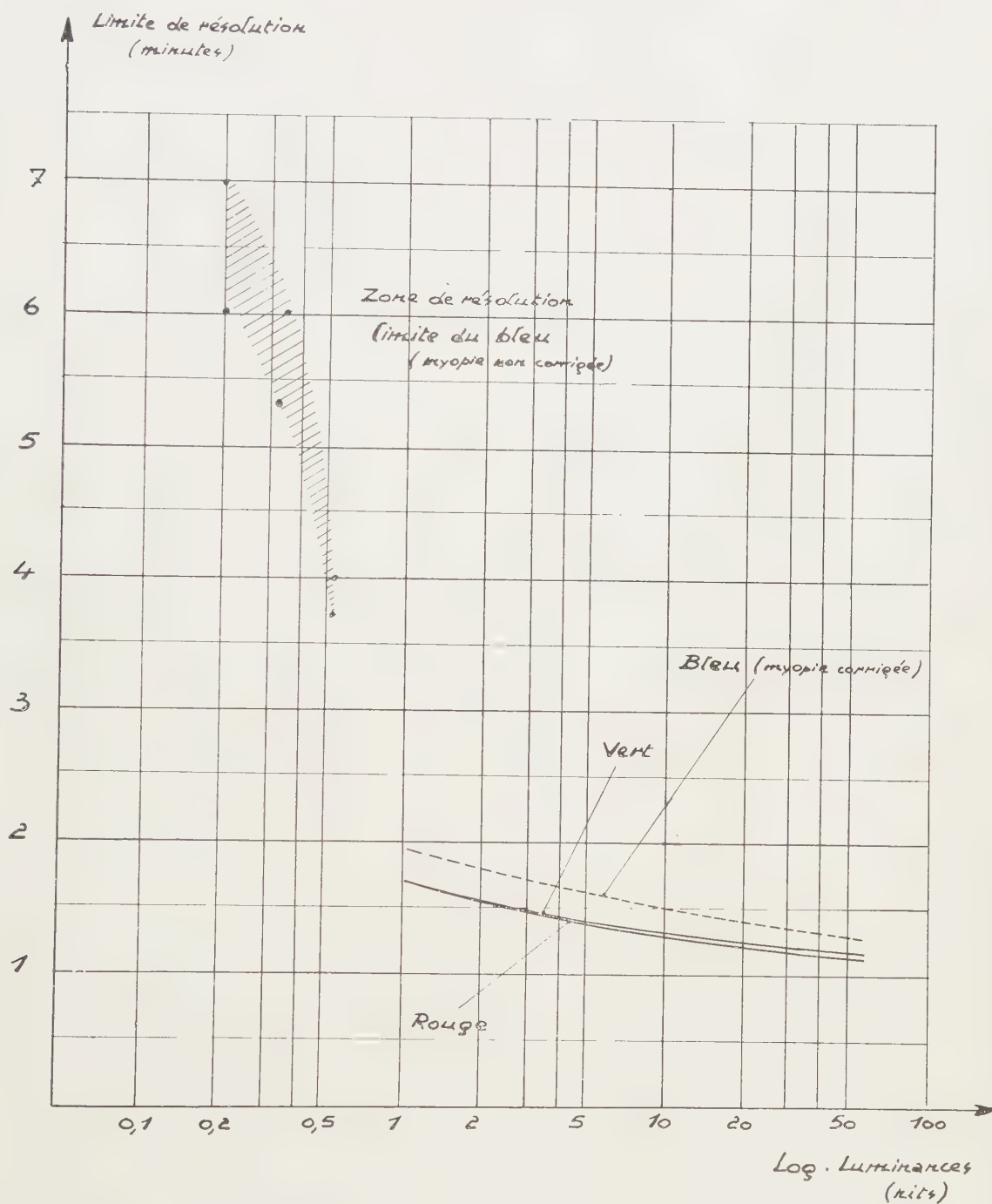


FIG. 8.

TABLEAU VI. — Limites de résolution pour les primaires de télévision en couleurs

Luminances nit.	0,21	0,36	0,53	1	9	30
Primaire Rouge.	—	—	—	1'42"	1'18"	1'10"
Primaire Verte.	—	—	—	1'42"	1'20"	1'12"
Primaire Bleue, durée d'observation illimitée ; distance d'examen 0,6 m	Cas non réalisé en télévision dans les hypothèses faites au titre II			1'57"	1'31"	1'21"
Primaire Bleue, durée d'observation 0,5 sec. distance d'examen 1,72 m	6' à 7'	5'20" à 6'	3'40" à 4'	Cas réalisé en télévision avec les hypothèses faites au titre II		

On voit que, à luminance et contraste égaux, pour des niveaux d'éclairement rétinien élevés, la myopie de l'œil pour le bleu étant corrigée, la limite de résolution est du même ordre de grandeur pour les trois primaires utilisées. On constate aussi que, dans les conditions de reproduction et d'observation du spectacle de télévision en couleurs telles qu'elles ont été formulées dans ce mémoire, la limite de résolution pour la primaire bleue pure est toujours au moins trois à quatre fois plus mauvaise.

Quelques expériences plus complètes ont été faites à proximité immédiate du *spectrum locus*, à l'aide de filtres interférentiels ; on en rend compte ailleurs [7]. Il suffira ici de signaler qu'elles confirment les résultats annoncés ci-dessus. On a procédé également à quelques mesures de la limite de résolution à luminance donnée, en fonction du contraste de luminance pour chaque primaire. Aux niveaux de 9 à 30 nits, pour les primaires verte et rouge, les résultats trouvés sont très peu différents de ceux qu'on obtient en lumière blanche et qui sont classiques. Le tableau VII et la figure 9 résument les résultats obtenus pour la primaire bleue.

TABLEAU VII. — Limite de résolution pour la primaire bleue (moyenne de 6 observateurs).

Luminance 0,53 nit. Distance d'observation 1,72 m.
Observations répétées de durée 0,5 seconde

Contraste	0,1	0,28	0,56	0,75	1
Résolution	11'	6'10"	1'42"	3'50"	3'45"

Quelques mesures de la limite de résolution en présence de contraste coloré pur, sans aucun contraste de luminance ont été exécutées ; on utilisait pour les faire un projecteur triple avec lequel on superposait sur un écran des images de mires géométriquement égales avec une précision de 20 microns, l'écartement des traits étant égal ou supérieur à 1 mm dans la plupart des cas. Le contraste de luminance pour chaque mire projetée

seule ne dépassait pas, avec cette méthode, la valeur 0,09. On a réalisé de cette manière des tests bicolores ; le tableau VIII résume les résultats obtenus (moyenne pour 4 observateurs).

En l'absence d'une définition généralement acceptée, nous avons exprimé le contraste coloré pur comme le rapport $\frac{\Delta N}{N}$ défini au début du chapitre IV ; N était ici, *arbitrairement*, le nombre de chromaticités distinctes au niveau de 200 trolands, qui séparent la primaire rouge et la primaire bleue que nous avons utilisées.

TABLEAU VIII. — Observations de durée illimitée Distance de l'observateur au test 3 m

Brillances (nits)	Blanc A	Blanc A	Blanc A	Rouge pr.	Vert pr.	Rouge pr.
	vert primaire	rouge primaire	bleu primaire	vert primaire	bleu primaire	bleu primaire
1	2'9"	2'6"	1'52"	1'45"	1'44"	1'42"
9	1'39"	1'34"	1'29"	1'21"	1'20"	1'19"
30	1'29"	1'22"	1'18"	1'12"	1'12"	1'11"
Γ	$\approx 0,46$	$\approx 0,46$	$\approx 0,69$	$\approx 0,85$	$\approx 0,77$	≈ 1

Tous les cas examinés dans le tableau VIII concernent des contrastes colorés accusés ($\Gamma > 0,4$) ; quand il en est ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, on obtient une limite de séparation du même ordre de grandeur qu'en présence d'un grand contraste de luminance.

Quand la primaire bleue intervient il semble qu'on ne se trouve pas placé ici dans les conditions précisées au titre II ; on comprend que cela est sans importance : une diminution de la luminance bleue, toutes choses égales d'ailleurs, dans une comparaison rouge/bleu par exemple ajouterait au contraste coloré un contraste de luminance supplémentaire : or, les limites de résolution trouvées dans ces cas sont déjà du même ordre que celles que nous avons obtenues avec un contraste de luminance élevé, en l'absence de contraste coloré.

On comprend que les résultats résumés par les tableaux VI et VIII représentent l'ordre de grandeur des meilleures limites de séparation que l'œil peut espérer atteindre dans la reproduction du spectacle en couleurs réalisée avec les niveaux de luminance maximale que nous avons adoptés. Pour les domaines du spectacle où se trouvent des structures ou des détails reproduits avec des contrastes (de luminance ou de couleur) faibles, la séparation sera toujours plus mauvaise. Cette remarque évidente nous amène à considérer le comportement particulier de la primaire bleue dans la reproduction du spectacle : cherchons ce qui se passe lorsque la structure ou le détail examinés sont reproduits grâce à des variations de la seule luminance bleue, les luminances verte et rouge restant constantes dans le domaine examiné.

Etant donné la faible luminance maximale relative

du bleu dans la reproduction, on devine que le contraste coloré et le contraste de luminance qu'on peut obtenir en projetant sur une teinte plate formée de proportions quelconques de vert et de rouge une « structure bleue » quelle qu'elle soit ne pourrait

atteindre des valeurs élevées que si la luminance totale reste basse. Dans les parties brillantes de la reproduction ces contrastes seront faibles et la limite de séparation obtenue dans l'examen de telles structures devra être mauvaise.

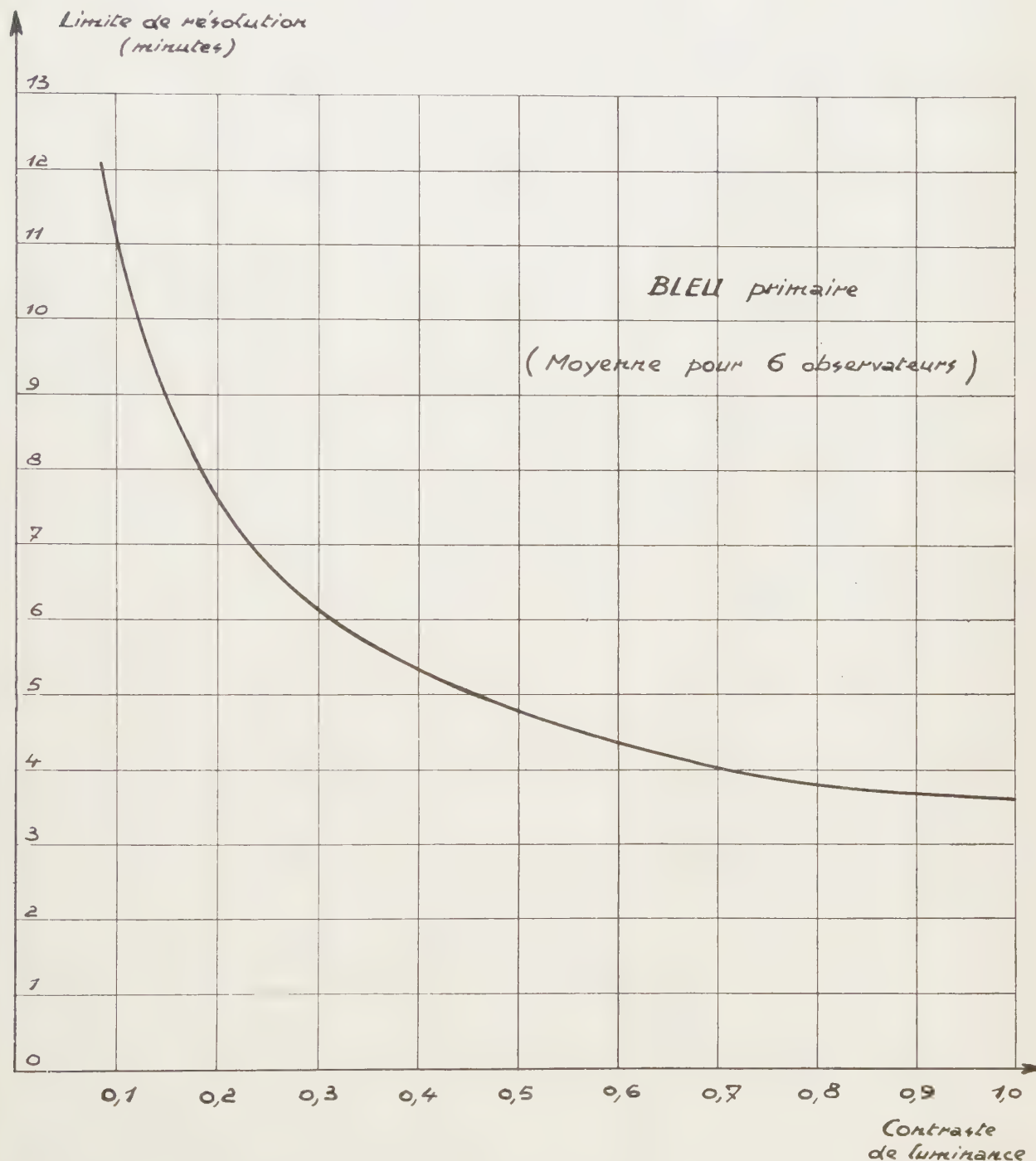


FIG. 9.

Pour préciser cela, on a fait des expériences pour 8 teintes réparties sur le triangle des couleurs conformément aux indications données par la figure 10. Sur cette figure, nous avons représenté par des vecteurs

et par des nombres l'amplitude des virages colorés que l'on obtient en ajoutant à la teinte plate considérée supposée réalisée avec sa luminance maximale la luminance maximale de la primaire bleue. Chaque vecteur

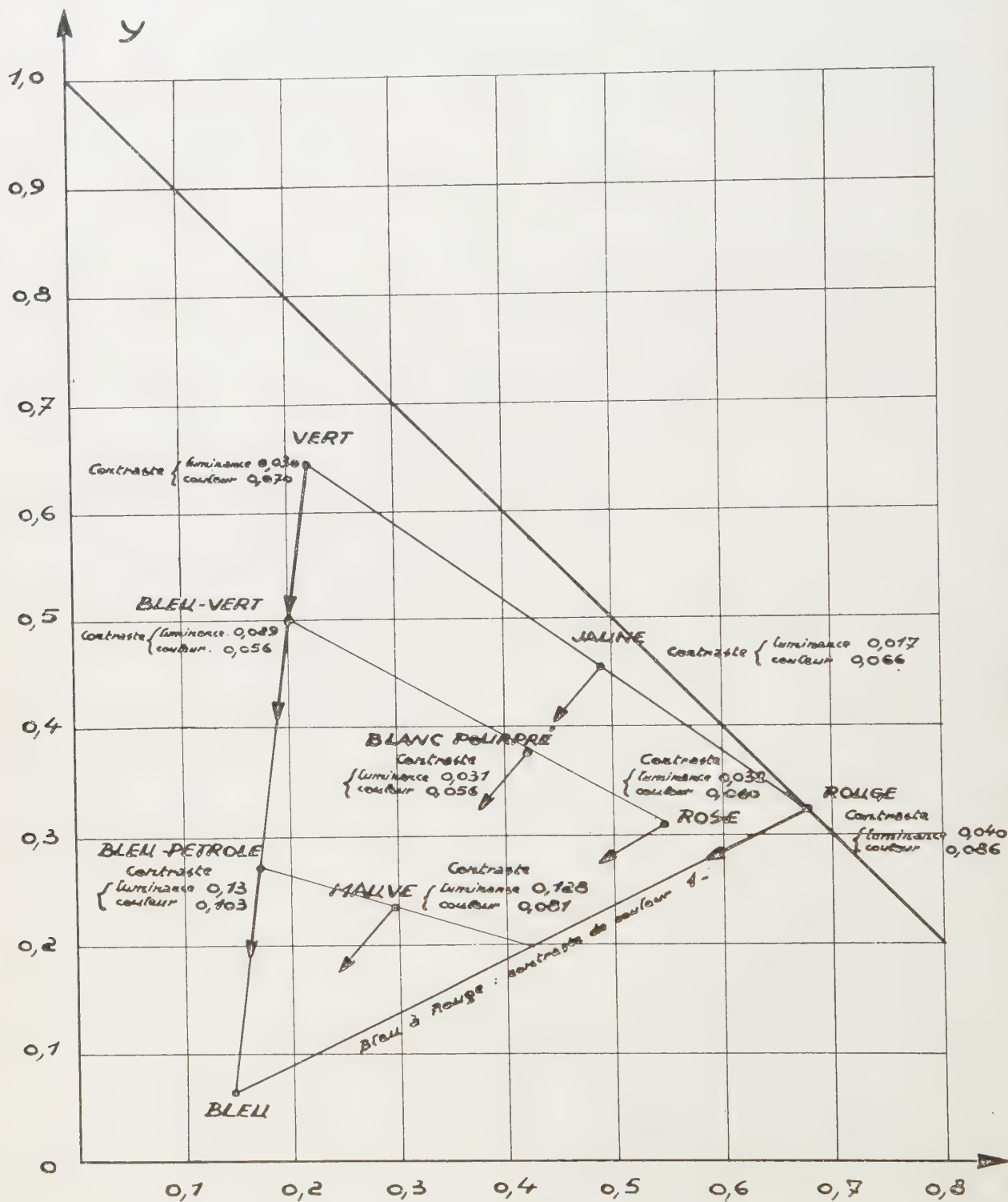


FIG. 10. — Teintes expérimentées et teintes résultant de l'adjonction de 0,53 nit de Bleu.

réunit le point figuratif de la teinte primitive et le point figuratif de la teinte altérée par addition de 0,53 nit de bleu. Les nombres qui l'accompagnent représentent 1°) le contraste de luminance γ le plus élevé qu'on puisse obtenir quand on superpose dans ces conditions une mire type Foucault de contraste 1 projetée en bleu à la teinte plate considérée ; 2°) en utilisant la définition déjà donnée, le contraste coloré maximum Γ ainsi obtenu.

TABLEAU IX

Fond		Liste de séparation obtenue, en minutes d'arc, quand la mire bleue de contraste 1 est projetée avec une luminance de :			
Teinte	Luminance (nit)	0,53 nit	0,36 nit	0,30 nit	0,20 nit
Bleu vert	17,5	12,8	15,6	17,3	22
Jaune	29,5	13,3	15,3	16,7	20,5
Vert	17,0	13,1	15,2	16,4	20
Blanc pourpre ...	16,2	11,8	14,3	15,8	19,8
Rose	16,0	12,2	14,4	16,0	19,6
Rouge	12,5	10,3	12,3	13,5	16,9
Bleu pétrole	3,5	8,7	10,3	11,6	14,6
Cyclamen	3,6	7,6	9,1	10,2	13
Bleu primaire (pas de fond)	0	4,8	5,8	6,4	7,7

Les observateurs étaient placés, comme précédemment, à 1,72 m de l'écran qu'ils observaient ; ils effectuaient des examens répétés à volonté, la durée de chaque examen étant limitée à 1/2 seconde. Le tableau IX donne, exprimées en minutes, les moyennes des limites de résolution fournies par 4 observateurs entraînés pour les huit teintes examinées ; on y a joint de nouvelles déterminations de la limite de séparation pour la primaire bleue seule ; ces déterminations, recoupant celles que donne d'autre part le tableau VI, donnent une idée des variations rencontrées dans ces mesures difficiles, et établissent la continuité des résultats.

On s'attendait certes à trouver des séparations mauvaises. Le lecteur sera peut-être surpris pourtant de constater que dans tout le domaine du triangle où les luminances maximales des teintes reproduites dépassent 10 nits, *une structure indiquée par la seule primaire bleue n'est en moyenne juste perceptible qu'autant que ses éléments sont vus sous un diamètre apparent toujours supérieur à 10 minutes* ; encore s'agit-il ici de limites et d'observateurs avertis par une longue expérience de ce qu'ils allaient voir. Même pour les teintes bleues et pourpres brillantes (*circa* 3 nits) les limites ne descendent pas encore au-dessous de l'ordre de 8 minutes. C'est seulement pour les bleus très sombres qu'on s'approche d'un optimum de l'ordre de 5 minutes. Par contre, dans tous les cas examinés, le virage coloré provoqué par l'addition de bleu était toujours très bien perçu. Que conclure de cet ensemble ? On pourrait en discuter longuement ; dans un spectacle coloré d'une durée limitée, la probabilité d'exis-

tence d'une teinte donnée dans un domaine d'étendue donnée est variable et d'évaluation difficile. Sans tenter une telle évaluation, on peut se souvenir que l'attention de l'observateur est toujours normalement attirée vers les régions de luminance élevée ; dans les effets de nuit, le spectateur s'attend à une mauvaise perception des détails ; non seulement l'agencement du spectacle en tient compte, mais encore l'impression d'éclairage nocturne n'est atteinte qu'autant que cette séparation reste mauvaise. C'est pourquoi nous dirons, sans avoir la prétention de formuler ici une règle fixe que, *la géométrie et la reproduction des détails et des structures fines étant supposées correctement assurées par les primaires verte et rouge, il est superfétatoire de chercher à reproduire en bleu primaire autrement que par des teintes plates tous les éléments qui seront vus sous des diamètres apparents inférieurs à une dizaine de minutes*. Nous avons montré par d'autres expériences radioélectriques qu'on peut faire des concessions plus larges encore à la nécessité dans laquelle se trouve la Télévision d'économiser la largeur des bandes de fréquences qui lui sont allouées.

Revenons à la notion de chromaticité discernable introduite par MAC ADAM. Le nombre minimum de ces chromaticités qui séparent deux points déterminés A et B du triangle des couleurs ne dépend pas seulement des niveaux de luminance considérés, mais encore du diamètre apparent du champ coloré qu'on examine. Ce phénomène, dont l'existence paraît universellement admise est encore fort mal connu. Y. LE GRAND [4] en signale l'existence, et rapporte à ce propos quelques essais isolés de MAC ADAM et d'AUBERT ; il est certain qu'en règle générale, et toutes choses égales d'ailleurs, le nombre de chromaticités discernables séparant A et B diminue vite quand le diamètre apparent du champ considéré décroît. Nous poursuivons actuellement des expériences destinées à préciser cet effet dans le cas particulier où nous nous sommes placés. D'importants travaux américains sur la télévision en couleurs (artifice des mixed highs) partent de là et admettent, dans leur développement, qu'il suffit pour obtenir la restitution correcte d'un spectacle coloré de se borner à reproduire les contrastes de luminance des structures et des détails de faible diamètre apparent, sans se préoccuper d'en restituer les teintes. M. LEBLAN a soumis cet artifice à une étude systématique dont les conclusions essentielles sont rapportées dans un autre mémoire (1).

V

Le phénomène de papillotage a été très soigneusement étudié dans le cas de la télévision monochrome [8,9]. Nous avons voulu étendre cette étude à quelques-uns des cas susceptibles de se présenter en Télévision en Couleurs. L'appareil qui fut construit

(1) Cf. Règles rationnelles permettant l'exploitation économique rationnelle des « standards » de télévision actuels. *Onde électrique*, XXIV, déc. 1954.

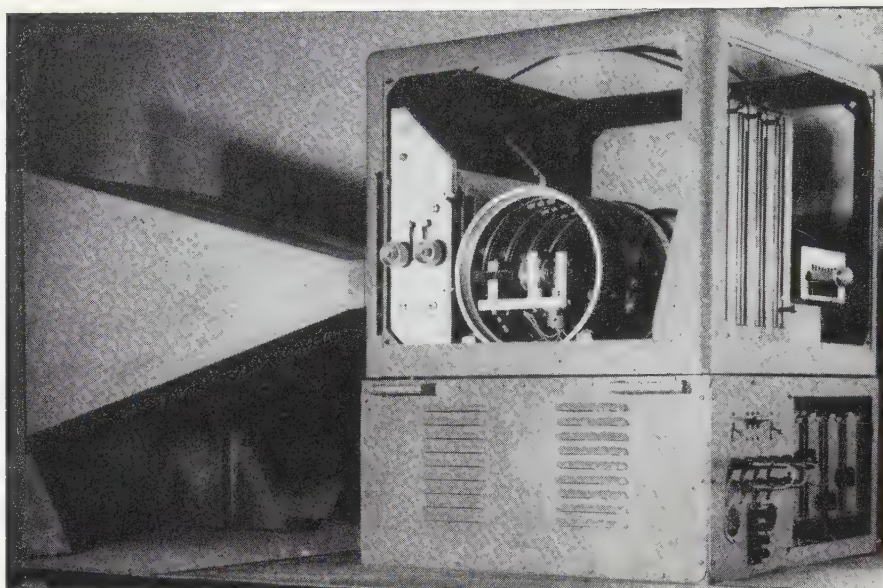


FIG. 11.

dans ce but est représenté par la photographie (fig. 11) et le schéma (fig. 12). Dans cet appareil quatre ensembles optiques identiques pouvaient projeter sur un écran unique des éclairagements uniformes. Des filtres colorés convenables placés sur chacun des trajets optiques permettaient de reproduire sur chacune de ces « voies » les caractéristiques spectrophotométriques des primaires choisies (voir p. 83). Les luminances fournies par chaque voie pouvaient être atténuées soit toutes ensemble, soit séparément, grâce à des jeux de filtres neutres préalablement étalonnés. Le papillotage était produit par la rotation du tambour T, formé de l'association de quatre cylindres de plexiglass creux soigneusement polis. Sur chaque cylindre était disposé un film sans fin sur lequel on avait exécuté des copies photographiques équidis-

tantes d'un coin photométrique convenable (fig. 13). Quand le tambour tournait à vitesse uniforme l'écran était illuminé par une, deux, trois ou quatre séries

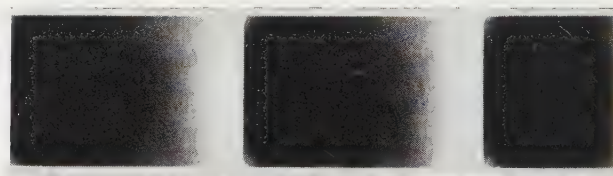


FIG. 13.

d'éclairs périodiques, la luminance de chaque éclair en chaque point de l'écran étant une fonction exponentielle du temps dont l'exposant correspondait à la

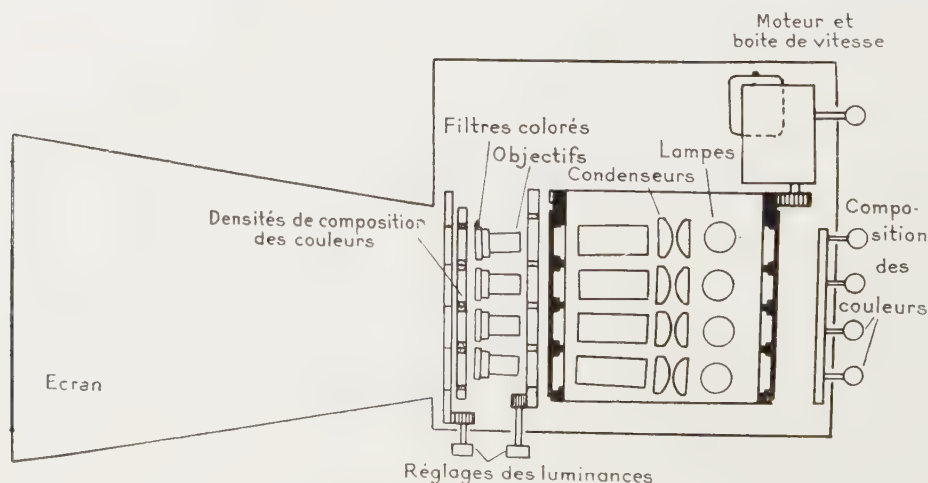


FIG. 12.

constante de temps de la matière phosphorescente dont on voulait reproduire les propriétés photométriques. Une description plus complète de cet appareillage sera publiée ailleurs [10].

On a, de cette manière, étudié le phénomène du papillotage pour des teintes correspondant à une dizaine de points du triangle des couleurs, dans le cas où ces teintes étaient reproduites par séquences ter-

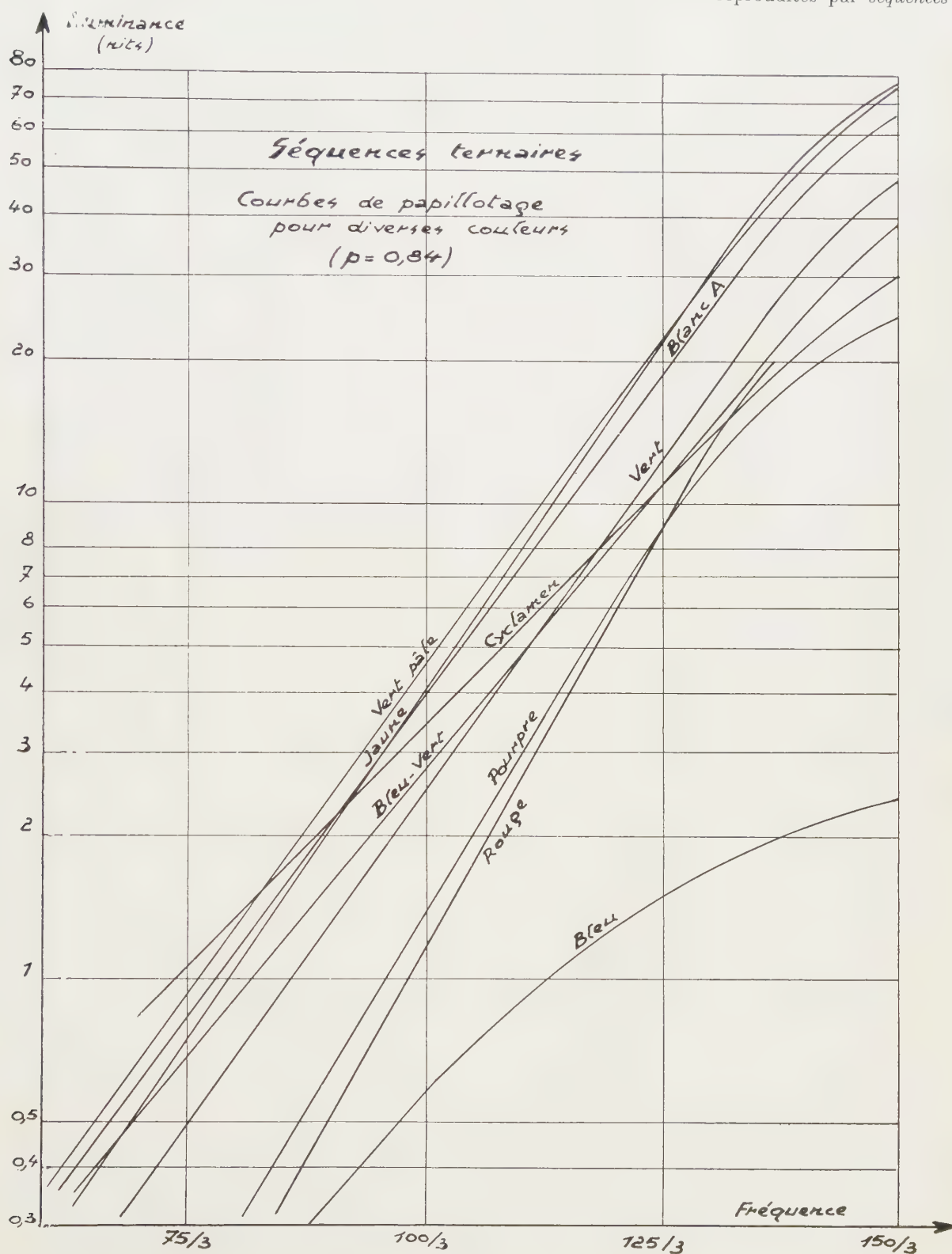


FIG. 14.

naires, c'est-à-dire par des éclairs successifs et équidistants dans le temps, chaque éclair envoyant sur l'écran un flux lumineux de l'une seulement des lumières colorées primaires utilisées. Voici l'essentiel des résultats obtenus :

1°) Les résultats variant beaucoup d'une observation à l'autre, des expériences ont été faites, dans le cas de la reproduction du blanc par séquence ternaire, sur 86 observateurs non daltoniens ; les résultats ont été analysés et l'on a défini de cette façon les relations $L_0 = f(N)$ entre la fréquence des éclairs et les luminances au-dessous desquelles la probabilité que le papillotage ne sera pas perçu atteint une certaine valeur p_0 (dans les exemples que nous donnons, $p_0 = 84\%$). Les expériences furent continuées avec un petit nombre d'observateurs et les résultats qu'elles fournissaient furent ajustés aux valeurs absolues des brillances obtenues dans le cas précédent.

2°) La loi de FERRY PORTER, d'abord formulée pour des éclairs « rectangulaires » (cas du cinéma), reconnue ensuite valable pour des éclairs exponentiels (télévision monochrome), reste valable pour les séquences ternaires colorées, dans un domaine de fréquences qui s'étend des fréquences les plus basses que nous ayons utilisées à une limite voisine de $N_0 = \frac{125}{3}$ (≈ 42 éclairs

par seconde pour chaque primaire). Dans tout ce domaine, pour un observateur donné, le logarithme de la luminance au-dessus de laquelle la sensation de papillotage s'établit est une fonction linéaire de la fréquence des éclairs.

3°) La pente et l'ordonnée à l'origine de ces fonctions dépendent de la teinte choisie. La figure 14 montre ce qui se passe pour neuf teintes dont les coordonnées colorimétriques sont respectivement :

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. — Vert pâle | $\left\{ \begin{array}{l} x = 0,340 \\ y = 0,491 \end{array} \right.$ |
| 2. — Jaune pur
(sans bleu) | $\left\{ \begin{array}{l} x = 0,489 \\ y = 0,455 \end{array} \right.$ |
| 3. — Blanc A | $\left\{ \begin{array}{l} x = 0,340 \\ y = 0,491 \end{array} \right.$ |
| 4. — Bleu ciel | $\left\{ \begin{array}{l} x = 0,294 \\ y = 0,234 \end{array} \right.$ |
| 5. — Vert primaire | (Cf. p. 83) |
| 6. — Vert-bleu | $\left\{ \begin{array}{l} x = 0,189 \\ y = 0,421 \end{array} \right.$ |
| 7. — Rouge-pourpre | $\left\{ \begin{array}{l} x = 0,518 \\ y = 0,246 \end{array} \right.$ |
| 8. — Rouge primaire | (Cf. p. 83) |
| 9. — Bleu primaire | (Cf. p. 83) |

L'une des deux courbes représentées sur la figure se distingue par des fréquences de papillotage bien différentes et une pente partout beaucoup plus faible, toutes choses égales d'ailleurs, que pour toutes les autres : elle correspond à la primaire bleue.

4°) La loi de FERRY PORTER est en défaut, dans tous les cas, aux fréquences élevées, comme on le voit

bien sur la figure 14 ; elle est aussi en défaut pour la primaire bleue dans tout le domaine de nos expériences. Nous retrouvons là de nouveau le comportement spécial de cette primaire.

5°) On sait que, d'ordinaire, le papillotage est perceptible avant de devenir gênant ; nos expériences montrent que, dans le domaine où la loi de FERRY PORTER commence à être en défaut, le papillotage ne prend en aucun cas le caractère de gêne intolérable : dans cette région, tous les observateurs semblent changer de critère de jugement.

6°) Supposons le reproducteur réglé de façon à ce que la luminance maximale de l'écran corresponde au blanc 2 848°K, par exemple. Compte tenu des résultats donnés antérieurement, la figure 15 donne, dans le cas d'une séquence ternaire de fréquence 150/3 les valeurs des probabilités de papillotage en divers points du triangle des couleurs (calcul conduit en donnant au blanc A une brillance de 60 nits correspondant à une probabilité de non-papillotage de 84%). Il faut attirer l'attention sur les erreurs successives dont se trouvent inévitablement entaché le tracé des domaines de la figure 15 ; malgré cela, on peut conclure aisément que le papillotage ne sera jamais perçu pour aucune teinte reproduite s'il ne l'est pas pour le rouge primaire à luminance maximale. La différence entre la probabilité de non-papillotage du rouge et du blanc à la luminance maximale reste assez faible pour qu'on puisse admettre que, le papillotage dans la

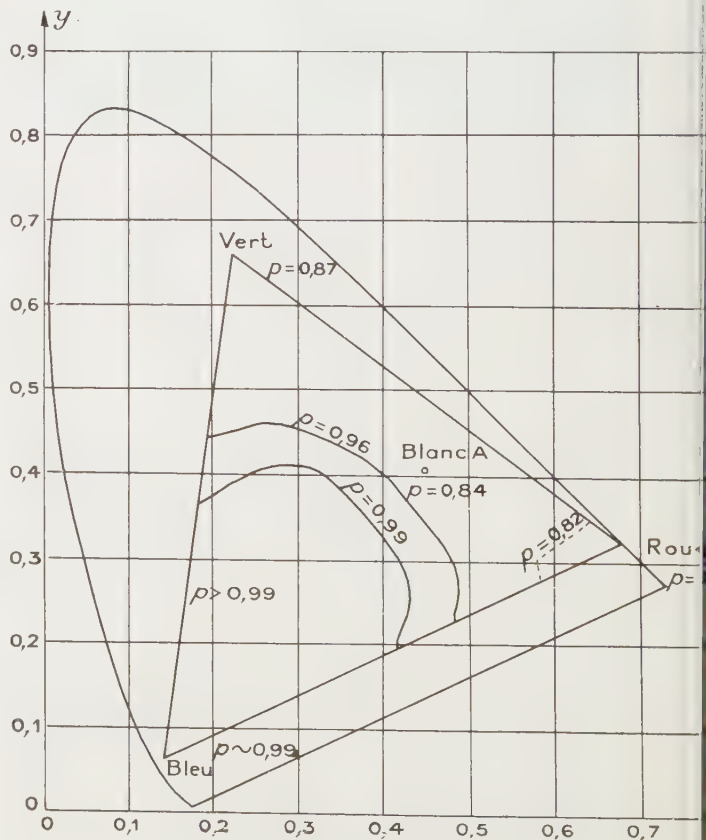


FIG. 15.

reproduction du blanc étant juste perceptible, il ne sera nulle part gênant.

7°) Les variations de la brillance au-dessus de laquelle le papillotage apparaît, pour une fréquence donnée, quand on fait croître l'angle sous lequel l'observateur examine l'écran sont très semblables à celles qui ont été antérieurement décrites par HAANTJES et de VRIJER [9]. Tous les résultats donnés ci-dessus se rapportaient à un angle de champ horizontal de 12° (rapport de la largeur à la hauteur de l'écran : $4/3$). La figure 16 donne les variations de la luminance correspondant au papillotage juste perceptible, dans le cas du blanc A, quand cet angle varie de 30° à 20° environ.

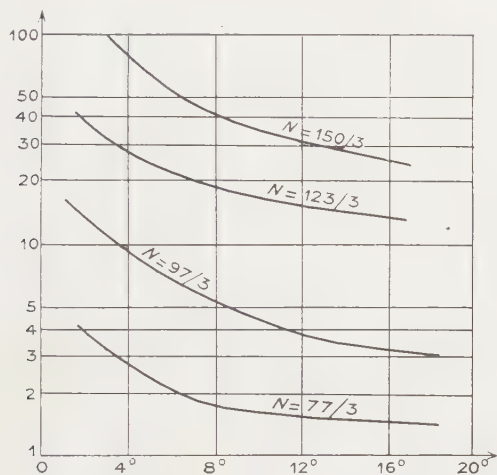


FIG. 16. — Influence du champ de vision. En abscisse, champ de vision ; en ordonnées, luminance en nits.

On peut évidemment reproduire une teinte donnée par synthèse trichrome additive en télévision d'un grand nombre de manières. Pour ne pas alourdir exagérément cet exposé, nous nous contenterons de signaler le résultat obtenu par la comparaison de trois procédés simples.

A l'aide de l'appareil déjà décrit, on reproduisait sur un écran la même teinte composée (blanc A ou jaune pur par exemple) avec sa luminance maximale soit en séquence ternaire (3 éclairs successifs fournis sans les primaires), soit en séquence binaire (deux

éclairs successifs, Vert + Bleu, Rouge + Bleu respectivement), soit par séquence monochrome (tous les éclairs identiques en intensité ont les coordonnées colorimétriques de la teinte à reproduire) ; dans chaque cas, pour un observateur donné, on notait la fréquence au-dessous de laquelle le papillotage devenait perceptible. Les résultats ont été d'une régularité remarquable. Une vingtaine d'observateurs, soit rompus à ce genre d'expériences, soit visiteurs occasionnels ont toujours trouvé que ces fréquences étaient entre elles comme les nombres 3, 2, 1, pour le domaine des luminances indiqué au début du mémoire. Des fréquences souvent mesurées, dans le cas du blanc A dans ces conditions, ont été respectivement : 144, 97 et 48. Remarquons encore que, dans ces dernières expériences, la présence ou l'absence de la primaire bleue est sans influence sur les résultats obtenus, ce qui était facilement prévisible à partir des résultats résumés sur la figure 14.

Terminons en rappelant que la technique cinématographique a établi depuis longtemps que l'illusion du mouvement est déjà suffisamment assurée sur l'écran d'une salle de spectacle, par une cadence de prise de vues et de projection des images atteignant 12 par seconde : la comparaison de cette valeur avec les fréquences critiques de papillotage que nous avons données ci-dessus est suggestive.

RÉFÉRENCES

- [1] W. T. WINTRINGHAM. Colour Television and Colorimetry. *Proc. I. R. E.* **39**, p. 1157, 1951.
- [2] P. G. GOLDMARK. *Proc. I. R. E.* **39**, 1951, p. 1288-1290.
- [3] H. FAULKNER. Permanent point-to-point links for relaying television. *British Contribution to Television I. E. E. London*, 1952.
- [4] Cf. Y. LE GRAND. — *Optique physiologique*, t. II, Ch. 9. Paris, éd. Rev. d'Opt., 1948.
- [5] W. D. WRIGHT. *Proc. Phys. Soc.* **53**, 1941, 93.
- [6] D. L. Mc ADAM. *J. O. S. A.* **32**, 1942, 247.
- [7] P. BILLARD. La limite de résolution de l'œil pour des lumières colorées (en préparation).
- [8] Voir par exemple : ENGSTROM. *Proc. I. R. E.*, **21**, 1953, p. 1631 et **23**, (1935), p. 295.
- [9] J. HAANTJES et F. W. DE VRIJER. *Rev. Tech. Philips*, **13**, 1951, p. 55.
- [10] P. BILLARD. Le papillotage des séquences de trames en télévision. *Rev. Opt.*, **34**, 1955, p. 129.

Manuscrit reçu le 5 janvier 1955.

Modifications of the Wright trichromatic colorimeter for extrafoveal and peripheral observations

J. D. MORELAND

From the Technical Optics Section,
Imperial College of Science and Technology, London.

SUMMARY. — The conditions required for successful experiments on peripheral colour vision are discussed. These include the provision of (a) a foveal fixation target (b) separation of the test and comparison field sufficient for resolution (c) periodic flashing of the test stimulus to avoid peripheral fading. A description is then given of the modifications made to the WRIGHT colorimeter, including the mirror assembly and perimeter attached to the observing end of the instrument to satisfy these conditions. Different field arrangements are described which can be used (a) to determine the spectral sensitivity, wavelength discrimination, and coefficient curves for the periphery and (b) to compare foveal and peripheral colour perception directly by a matching technique for any peripheral location.

SOMMAIRE. — Discussion des conditions nécessaires à la réalisation d'expériences en vision périphérique des couleurs :

a) point de fixation fovéale ; b) séparation suffisante du test et du champ de comparaison ; c) apparition du test par éclats périodiques afin d'éviter la disparition périphérique.

L'auteur donne une description des modifications apportées au colorimètre de WRIGHT, pour satisfaire à ces conditions, notamment l'adjonction du système de miroirs et d'un périmètre du côté où l'on observe dans l'instrument. Description de différentes dispositions favorables du champ :

a) pour déterminer la sensibilité spectrale, la discrimination des longueurs d'ondes et les courbes de coefficients pour la périphérie ; b) pour comparer la perception des couleurs en vision fovéale ou périphérique, directement par une méthode de comparaison, pour n'importe quel point périphérique.

ZUSAMMENFASSUNG. — Es werden die Bedingungen für erfolgreiche Versuche über das periphere Farbsehen untersucht. Man muss vorsehen : a) einen Fixationspunkt für die Fovea, b) eine für die Auflösung hinreichende Trennung des Prüf- und Vergleichsfeldes und c) einen Flimmerreiz, um das periphere Abklingen zu unterbinden. Das Wrightsche Kolorimeter bedarf einiger Abänderungen, die sich auch auf die Spiegelanordnung und das Perimeter an der Beobachtungsseite des Instrumentes erstrecken, um diesen Bedingungen zu genügen. Es werden verschiedene Anordnungen der Felder beschrieben, die geeignet sind, um a) die spektrale Empfindlichkeit, das Unterscheidungsvermögen der Wellenlängen und die Kurven der Koeffizienten für die Netzhautperipherie zu bestimmen und b) das foveale und periphere Farbsehen unmittelbar zu vergleichen, wobei der Vergleich für jede beliebige Stelle der Peripherie vorgenommen werden kann.

Many psychophysical experiments on colour perception have been performed with the foveal retina but only a few authors have attempted the collection of data from the extrafoveal and peripheral regions. The great importance of the fovea for colorimetry and the ease with which accurate observations can be made there probably account for the discrepancy of research effort between fovea and periphery.

To do accurate work in the retinal periphery some special observational difficulties due mainly to poor visual acuity and colour sense must be overcome and the author has modified the WRIGHT trichromatic colorimeter so that measurements on spectral sensitivity, colour mixture and wavelength discrimination can be extended to the retinal periphery. New experiments have also been carried out in which foveal and peripheral vision are directly compared.

The new features which have been introduced are :

1. *A means of controlling the fixation direction of the eye.* In the unmodified colorimeter (WRIGHT [5]) the test and comparison patches, which are juxtaposed with only a fine line of division, are viewed with the fovea and themselves act as a fixation target. By providing a small spot for foveal fixation at an angular separation θ from the centre of the field, the test and comparison patches can be made to fall on the peripheral retina at positions corresponding to displacements of θ from the fovea in the visual field.

2. *Separation of the test and comparison patches.* Two juxtaposed patches seen with the peripheral retina are difficult to resolve. Indeed the poorer peripheral discrimination will tend to accentuate fusion when the patches differ in luminance and chromaticity. Separation of the test and comparison patches has therefore been provided so that clear resolution can be obtained.

3. *Dissociation of the test and comparison patches.* It has been observed over the last century that stimuli viewed peripherally give rise to sensations of a hue and saturation different from those initiated by the same stimuli applied to the fovea. Much of the data is qualitative and contradictory, due, no doubt, to the more frequent use of pigment rather than spectral stimuli (for a review of this work see a paper by

BAIRD [1]). If the comparison patch, which contains a mixture of three stimuli R, G and B for the measurement of chromaticity, moves into the peripheral field of view together with the test patch, measurements would be made with the comparison patch placed upon retinal areas of varying sensitivity. Thus a device has been incorporated so that the comparison patch may always be viewed at the fovea for any angle of separation of the test patch. In this way, stimuli as perceived in the periphery may be recorded directly by measurements made with the foveal retina used as a standard. It is of interest to note that this method can also provide a test of the degree of symmetry of the retina for colour.

4. *A means of interrupting the light beam to the test and comparison patches.* Attention must be paid to the fading of a field that is continuously viewed by the periphery. Faced with this problem workers have used a "glance technique" of viewing, in which the field is seen for a short time and then the eye is closed or averted to allow time for recovery of sensitivity and the readjustment of controls (WEALE, [3]). One criticism of this method is that the exposure time is unknown and may not be constant throughout the experimental session. Since alterations of sensitivity may occur at different rates in different mechanisms (TROXLER [2]), accurate work would seem to demand a definite exposure time. This problem is more acute when one patch is viewed with the peripheral and one with the foveal retina, where fading in the patch viewed peripherally will differ from that in the patch viewed with the fovea. The foveal sensation, also, changes by adaptation, becoming desaturated from prolonged viewing. The peripheral test and foveal comparison stimuli should therefore both be interrupted periodically in order to arrest these processes sufficiently and also to help divide the subjects' attention equally between the two patches. The method of interruption was worked out in conjunction with A. C. CRUZ and will be described in a later paper.

The Apparatus. — The unmodified colorimeter is described by WRIGHT [5] and in the present application is arranged as if for binocular matching (fig. 1a) with the left eye system fixed for a chosen interocular



FIG. 1. — (a) Observing end of colorimeter when arranged for binocular matching.
(b) The same modified for peripheral observations.

separation. An attachment, supporting three plane mirrors is secured to the viewing end of the colorimeter (fig. 2). The mirrors M_1 , M_2 , M_3 , reflect the comparison beam into the right eye of the subject shown. M_1 remains fixed, apart from occasional levelling. M_2 can be rotated about an axis parallel to the test beam. M_3 can be rotated about an axis, which

lies in a plane containing M_1 , M_2 , and M_3 and is always perpendicular to the test beam. It can be moved perpendicularly away from the test beam by means of a rack and pinion drive. Both M_2 and M_3 are mounted on the same holder which can be rotated in a vertical plane about the test exit pupil. Referring to figure 2, the mirrors are shown arranged to give a vertical

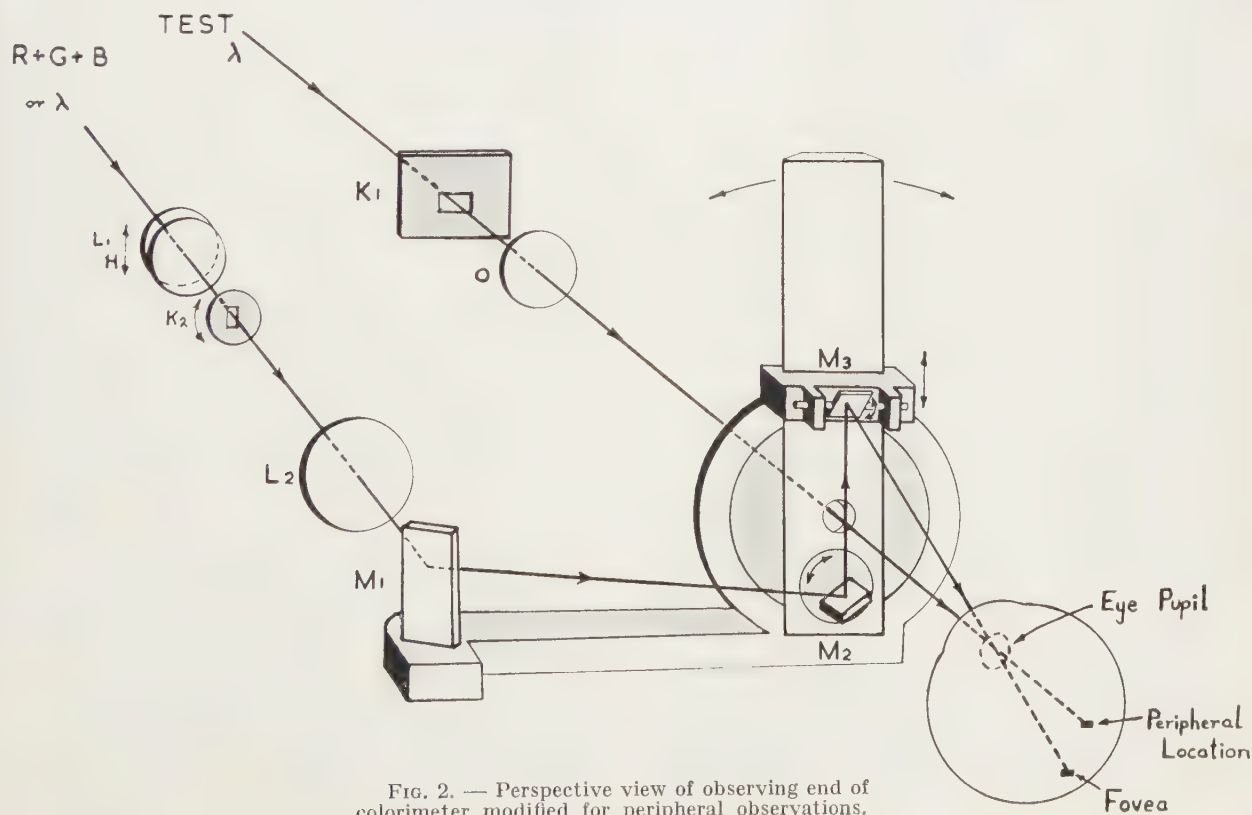


FIG. 2. — Perspective view of observing end of colorimeter modified for peripheral observations.

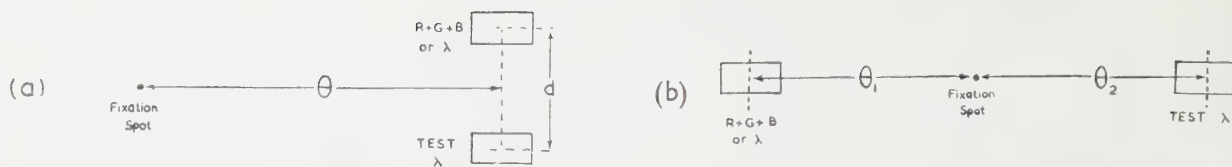


FIG. 3. — Possible fields of view using the modified colorimeter. Focal fixation of the comparison field is achieved when $\theta_1 = 0$.

separation of the test and comparison fields. The angular separation of the fields is determined by rotation of M_3 , and the point of intersection of the two beams by adjusting the distance between M_2 and M_3 . By rotating the holder — say clockwise — through an angle φ and M_2 anticlockwise through angle $\varphi/2$, the comparison field is rotated about the test field by φ . A small levelling correction must be made to M_1 , to compensate for the vertical displacement of M_2 , which being small may be carried out of the beam. In this way, it is possible to map out the major part of the visual field of the eye. The mirrors are fully aluminized and are quite small. It has been found necessary to protect them from dust and the subject's breath, by paper shields, since these mirrors suffered rapid deterioration through contamination of the surfaces in trial experiments before using shields.

For horizontal separation of the fields ($\varphi = 90^\circ$) M_2 can be dispensed with. The comparison beam is reflected directly from M_1 to M_3 and thence to the eye (fig. 1 b). Here, the main advantage is the gain in light especially needed at the blue end of the spectrum.

Setting of the angular separation of the fields. — Mounted on the same attachment is a 2 inch long semi-reflecting plane mirror M_4 (not shown) by means of which an illuminated perimeter is superimposed on the field of view. The perimeter consists of a circular arc of paxalin divided into clearly marked intervals of 5° , of radius 53 cms, which is the distance of the fields from the exit pupils, and centred upon the test exit pupil. When the adjustment of the mirrors is complete M_4 is swung out of the way.

Provision of fixation. — A fixation spot can be provided along a horizontal line over a wide range of angles. For this, use is made of the auxiliary optical system used for adaptation experiments (WRIGHT [5]). The field is stopped down by a pinhole aperture and filters are inserted to control the intensity. For angles greater than 15° a small auxiliary mirror is mounted to move along a horizontal bar outside the test beam tube. The fixation angle is then determined by the tilt of this mirror.

Other modifications (fig. 1 b and fig. 2). — By addition of the mirrors M_1 , M_2 , M_3 , the path of the comparison beam before it reaches the eye is increased by about 18 cms, but it is necessary that K_1 and K_2 should be focussed in the same plane. A suitable converging lens L_2 , is substituted for the existing eye

lens E_2 of the left eye system, so that K_2 appears in focus at the same time as K_1 . A diverging lens L_1 , is attached to the carriage upon which H is mounted, so that the image of F , which is the exit pupil of the system, is advanced a further 18 cms. The aperture K_2 is redesigned so that it can be rotated in the vertical plane; any optical rotation introduced by the mirror system can thus be compensated.

Possible field arrangements of this apparatus. —

In figure 3 a the arrangement is similar to that used by WEALE [3] except that each patch is rectangular in place of WEALE's semi-circular test fields which also covered an area one third as large. Figure 3 b shows one horizontal arrangement which eliminates certain defects noticed in arrangement 3 a. The separation, d , necessary for clear resolution need not be determined since the patches are separated by the foveal retina and d is always adequate. Further, rivalry of attention is more balanced in 3 b. Since there is always a tendency to "look" at the field in 3 a, this error is divided equally between test and comparison patches if $\theta_1 = \theta_2$.

If $\theta_1 = 0$, then the comparison patch is viewed with the fovea and the test patch with the peripheral retina at an angle in the right field of view of θ_2 .

Acknowledgments. — I wish to thank Mr E. G. MENAGE for making the mirrors, Mr F. W. MARTIN for his help in constructing the apparatus, and Professor W. D. WRIGHT for constant advice and encouragement.

This research is part of a research programme on vision being carried out at the Imperial College with the aid of an expenses grant from the Medical Research Council and their assistance in this way is gratefully acknowledged.

REFERENCES

- [1] BAIRD, J. W. *Colour Sensitivity of the Peripheral Retina*. Carnegie Institution, Washington Publication, N° 29, 1905.
- [2] TROXLER, D. *Ueber das Verschwinden gegebener Gegenstände innerhalb unseres Gesichtskreises*. Himly and SCHMIDT's Ophthalmologische Bibliothek, Jena, 1804, II, 2, S.
- [3] WEALE, R. A. *J. of Physiol.*, **113**, 1951, p. 115.
- [4] WEALE, R. A. *J. of Physiol.*, **119**, 1953, 170.
- [5] WRIGHT, W. D. « *Researches on Normal and Defective Colour Vision* », p. 45. London, 1946. Henry Kimpton.

Lettres à l'éditeur

Sur la sommation binoculaire

M. AGUILAR

Instituto de Optica. Daza de Valdès, Madrid.

Dans le numéro 4 d'*Optica Acta* (Fev. 1955) on trouve un article de M. A. BOUMAN « On foveal and peripheral interaction in binocular vision ». Dans cet article l'auteur tout en mentionnant la publication de résultats qui confirment l'existence de la sommation binoculaire déclare « the amount of energy supplied to one eye in order to detect a difference in brightness does not depend on the apparent brightness in the binocular field ».

A la suite de l'exposé fait à la réunion de Florence (Septembre 1954) par Mr BOUMAN, Mr OTERO fit des objections à ses conclusions en rappelant les résultats obtenus récemment en Espagne [1] [2] ; Mr BOUMAN ne fait pas mention de ces résultats, aussi croyons-nous utile de présenter ici un résumé de ces travaux en tenant compte de mesures encore inédites [3].

Les conditions expérimentales sont décrites dans la bibliographie ci-dessous [1] [2] et nous nous bornerons à résumer les résultats dans les quatre tableaux suivants.

Nous pouvons déduire des tableaux ci-dessus l'amélioration du seuil différentiel relatif en fonction de la luminance d'adaptation. Nous avons exprimé dans le tableau V cette amélioration. La première colonne donne la luminance du champ observé par l'œil droit et la deuxième la différence relative entre le seuil différentiel de l'œil droit lorsque l'œil gauche est dans l'obscurité (ou adapté à une très faible luminance) et lorsqu'il observe une plage de luminance sensiblement égale à celle qu'observe l'œil droit.

Ces résultats sont en contradiction avec ceux de Mr BOUMAN.

Nous avons travaillé sans tenir compte du temps d'observation et en employant pour les deux yeux une lumière ayant la même composition spectrale, ainsi nous n'avons pas remarqué les périodes de domination de l'un ou de l'autre œil dont parle Mr BOUMAN, peut-être ces périodes et leur variation en fonction de la luminance aident-elles à l'interprétation de nos résultats.

TABLEAU I

Œil observateur : Luminance = 4,8 nits
(résultats de 10 000 mesures)

Œil gauche	$\frac{\Delta L}{L}$ Œil droit (qui observe le test)		
Luminance en nits	Obs. L. P.	Obs. J. O.	Obs. A. P.
1 500	0,0202	0,0199	0,0160
130	0,0202	0,0176	0,0143
4	0,0161	0,0155	0,0131
2,6	0,0172	0,0158	0,0152
0,02	0,0176	0,0155	0,0148

TABLEAU II

Œil observateur : Luminance = 209 nits
(résultats de 13 800 mesures)

Œil gauche	$\frac{\Delta L}{L}$ Œil droit (qui observe le test)		
Luminance en nits	Obs. 1	Obs. 2	Obs. 3
6 239	0,0196	0,0194	0,0641
2 585	0,0180	0,0178	0,0550
559	0,0189	0,0174	0,0575
233	0,0173	0,0167	0,0463
50	0,0173	0,0169	0,0475
21	0,0206	0,0178	0,0550
0,015	0,0231	0,0180	0,0641

TABLEAU III

Œil observateur : Luminance = 1 300 nits
(résultats de 13 300 mesures)

Œil gauche	$\frac{\Delta L}{L}$ Œil droit (qui observe le test)			
Luminance en nits	Obs. L. A.	Obs. C. L.	Obs. S. M.	Obs. L. C.
11 800	0,0214	0,0230	0,0206	0,0165
6 300	0,0207	0,0222	0,0178	0,0148
1 100	0,0205	0,0202	0,0180	0,0132
590	0,0189	0,0225	0,0186	0,0150
86	0,0189	0,0242	0,0195	0,0150
0,038	0,0207	0,0235	0,0200	0,0156

TABLEAU IV

Œil observateur : Luminance = 4×10^3 nits
(résultats de 27 900 mesures)

Œil gauche	$\frac{\Delta L}{L}$ Œil droit (qui observe le test)			
Luminance en nits	Obs. 1	Obs. 2	Obs. 3	Obs. 4
8×10^{-2}	0,0207	0,023	0,015	0,020
2×10^2	0,0189	0,024	0,015	0,019
2×10^3	0,0189	0,022	0,015	0,018
5×10^3	0,0205	0,020	0,013	0,018
2×10^4	0,0207	0,022	0,015	0,018
5×10^4	0,0214	0,023	0,016	0,020

TABLEAU V

Luminance du champ d'observation	Variation du seuil différentiel relatif en %
4,8 $\times 10^0$ nits	2,6
2,09 $\times 10^2$ nits	10
1,3 $\times 10^3$ nits	10
4 $\times 10^4$ nits	20

- [1] M. AGUILAR, M. SOLIS. *An. Fis. Quím.*, 1951, **47**, 300.
 [2] M. SOLIS, M. AGUILAR y A. PLAZA. *An. Fis. Quím.* **49**, 1953, 274.
 [3] M. SOLIS, M. AGUILAR. *An. Fis. Quím.* (sous presse).

Mesures sur le bruit de fond en optique

(Spectre lié au grain des films photographiques)

B. PICINBONO ET M. SAVELLI

Faculté des Sciences d'Alger. Laboratoire de Physique théorique

I. Introduction. — Divers travaux ont été consacrés récemment à la transposition à l'optique de la *théorie de l'information*. Ils ont montré la nécessité d'introduire en optique un effet perturbateur analogue à celui joué par le bruit de fond en radioélectricité et que nous appellerons le *bruit de fond optique*. Nous décrivons ici une méthode expérimentale permettant de déterminer les caractéristiques du bruit optique lié au grain d'un film photographique uniformément impressionné.

II. Principe de la méthode. — La transparence d'un film rapporté à un système d'axes rectangulaires peut être considérée comme une fonction aléatoire $T(X, Y)$. Le film étant uniformément impressionné, cette fonction est stationnaire (f. a. stat.) et nous nous proposons de déterminer expérimentalement sa densité spectrale T_{uv}^2 .

L'appareil est décrit sur la figure 1. On réalise sur un film en mouvement uniforme une tache lumineuse de quelques microns en formant l'image d'un trou source de quelques dixièmes de millimètres à l'aide

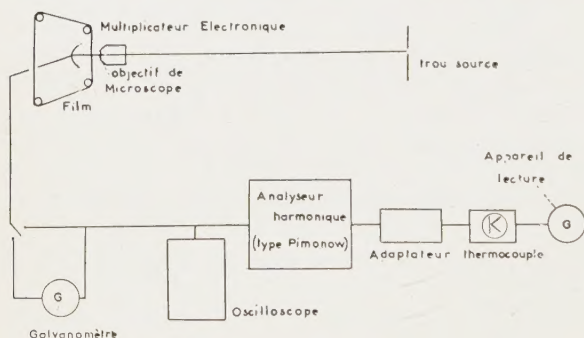


FIG. 1. — Principe de la méthode.

d'un objectif de microscope. Un multiplicateur électronique transforme le flux lumineux en courant électrique. Le passage des grains crée des fluctuations de ce courant au cours du temps et on détermine leur spectre à l'aide d'un montage radioélectrique.

III. Interprétation théorique des résultats. — La densité spectrale recherchée est la transformée de FOURIER $A(u, v)$ de la fonction de corrélation de $T(X, Y)$. Soit $\omega \xi \eta$ un repère fixe lié à la tache et au multiplicateur. Quand l'origine O du système OXY lié au film a pour coordonnées (x, y) le flux lumineux reçu par le multiplicateur est :

$$(1) \quad \Phi(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} I(\xi, \eta) T(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta$$

[$I(\xi, \eta)$ est la distribution d'intensité lumineuse dans le plan $(\omega \xi \eta)$]. $\Phi(x, y)$ est une fonction aléatoire stationnaire de densité spectrale

$$(2) \quad \overline{\Phi_{uv}^2} = |G(u, v)|^2 A(u, v)$$

où $G(u, v)$ est la transformée de FOURIER de $I(\xi, \eta)$.

Dans l'appareil décrit, le film se déplace parallèlement à Oξ et le flux se réduit à une fonction de x seul soit $\Phi(x, y_0)$. On peut alors montrer que la densité spectrale s'écrit

$$(3) \quad \overline{\Phi_u^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(u, v)|^2 A(u, v) dv$$

Supposons les propriétés statistiques du film isotropes et $I(\xi, \eta)$ fonction seulement de $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. On peut alors montrer que

$$(4) \quad \overline{\Phi_u^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\rho)|^2 A(\rho) d\rho \quad \text{avec } \rho^2 = u^2 + v^2$$

On déduit $\overline{\Phi_u^2}$ de l'expérience et $G(\rho)$ des caractéristiques de l'appareil $A(\rho)$ est alors donné par l'équation intégrale (4) qui, résolue, donne

$$(5) \quad |G(\rho)|^2 A(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty -\frac{d}{du} \overline{\Phi_u^2} \frac{(\sqrt{x^2 + \rho^2})}{\sqrt{x^2 + \rho^2}} dx$$

En fait, ce qu'on obtient expérimentalement est le spectre $\overline{\Phi_v^2}$ provenant de la fonction dépendant du temps : $\Phi(Vt, y_0)$, où V est la vitesse du film. On montre facilement que :

$$(6) \quad \overline{\Phi_u^2} = V \overline{\Phi_v^2} \quad \text{avec } u = \frac{1}{V} v$$

IV. Résultats expérimentaux. — Les expériences ont été faites avec des taches lumineuses de diamètres égaux à 6, 25 μ et 10 μ . Leur dimension est donc nettement supérieure à celle de la tache de diffraction correspondant à un point objet (0,3 μ). Les spectres $\overline{\Phi_v^2}$ correspondant à ces deux taches et pour un même film sont contenus dans la figure 2. On peut supposer, en première approximation, que l'on a

$$I(\xi, \eta) = 1 \text{ si } \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < a; \quad I(\xi, \eta) = 0 \text{ si } \sqrt{\xi^2 + \eta^2} > a,$$

$$\text{Dans ces conditions on trouve } G(\rho) = 2\pi a^2 \frac{J_1(x)}{x}$$

$$\text{avec } x = 2\pi a \rho.$$

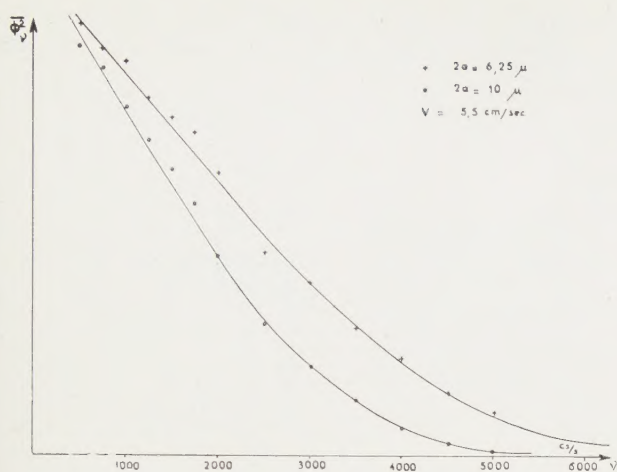


FIG. 2.

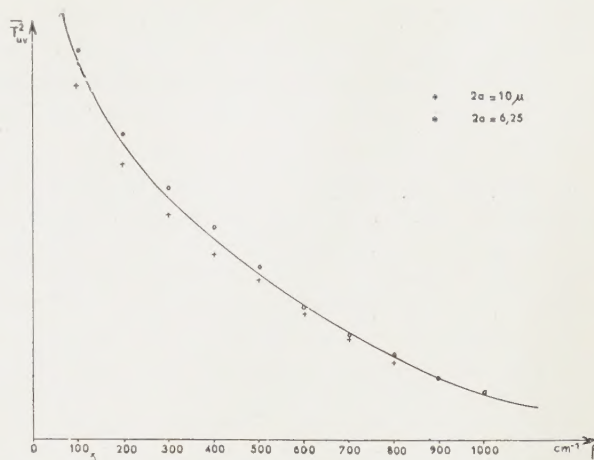


FIG. 3.

Le graphique de la figure 3 donne la densité spectrale $A(\nu) = \overline{T_{uv}^2}$ déterminée pour le film étudié (de type courant) à partir des fonctions Φ_v^2 relatives aux deux taches précédentes. On constate que la densité

$A(\nu)$ obtenue est celle d'un spectre non uniforme. On voit, sur la figure 3 qu'il y a bon accord entre les spectres obtenus à partir de chacune des deux taches lumineuses.

Détermination optique du « bruit de fond » photographique

par Paul CROCE et Mme Madeleine MARQUET
Institut d'Optique, Paris

De même que dans l'article de B. Picinbono et M. Savelli qui paraît dans le présent numéro de *Optica Acta*, nous avons essayé de caractériser le bruit de fond introduit dans l'observation d'une image photographique par la structure de l'émulsion développée.

Dans la méthode que nous avons utilisée l'analyse harmonique est effectuée optiquement : le film à étudier, voilé uniformément est placé au voisinage d'un objectif (fig. 1) formant l'image d'un point source

éclairé en lumière monochromatique. Dans le plan image on obtient ainsi un spectre de diffraction dont l'amplitude en chaque point est proportionnelle à la transformée de FOURIER de l'amplitude à proximité du film (et non de l'intensité $T(X, Y)$ considérée dans l'article cité ci-dessus, laquelle est le carré du module de cette amplitude).

On détermine expérimentalement la répartition d'énergie lumineuse dans le plan image par emploi successif de deux récepteurs : plaque photographique et photomultiplicateur.

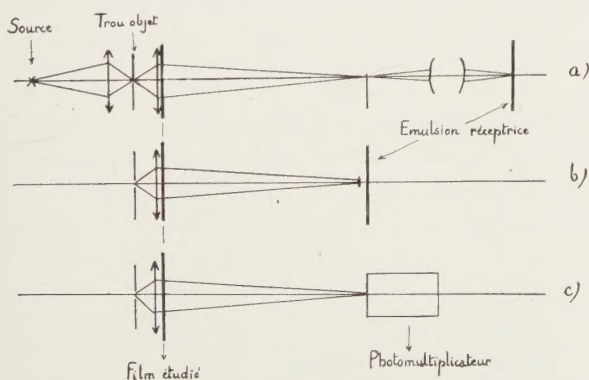


FIG. 1.

a) **Méthode photographique.** L'image centrale trop intense doit être cachée soit avec une lame de rasoir dans le plan image, la photographie étant prise à l'aide d'un deuxième objectif (fig. 1a), soit par obturation d'un faisceau lumineux à l'aide d'un petit disque placé aussi près que possible de l'émulsion réceptrice (fig. 1b).

Par photographie on obtient une vue d'ensemble du spectre de diffraction, les mesures d'intensité pouvant être obtenues par les méthodes usuelles de photométrie photographique.

Les premiers résultats ont mis en évidence une anisotropie des émulsions provenant en grande partie du support mais également, semble-t-il, d'une direction privilégiée des grains de l'image argentique coïn-

cidant approximativement avec le sens de coulage.

Pour supprimer l'anisotropie du support ainsi que ses variations de phase il est nécessaire d'opérer par immersion entre deux lames de très bonne qualité optique.

b) **Méthode électronique.** Les premiers essais ont été effectués avec une fente source, du fait du manque de lumière. Le photomultiplicateur est muni d'une fente variable parallèle à la fente source et peut se déplacer perpendiculairement à la direction des fentes.

Le montage (fig. 1 c) permet d'obtenir directement la courbe des intensités dans le plan de l'image ; l'emploi d'écrans absorbants interposés dans le système d'éclairage permet de mesurer des rapports d'intensité entre 1 et 10^{-6} .

La figure 2 reproduit une des courbes obtenues (énergies relatives en fonction des fréquences transmises).

Ces courbes très adoucies varient avec le noircissement et la nature de l'émulsion étudiée.

Si l'on fait l'approximation d'une répartition iso-

trope du bruit, on peut théoriquement repasser au cas du point par la formule 5 donnée dans l'article cité ci-dessus.

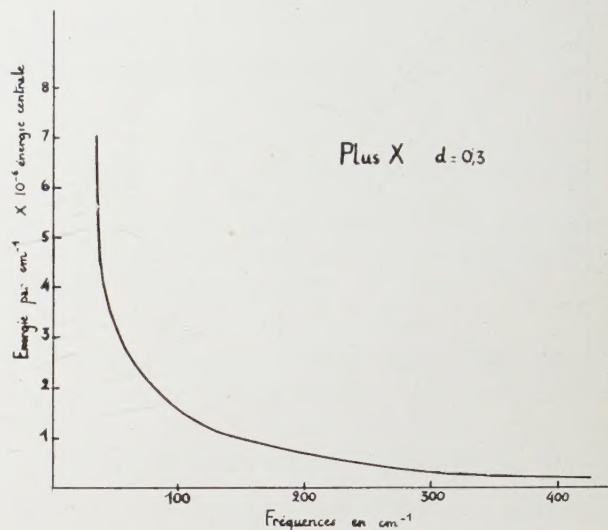


FIG. 2.